分析力学

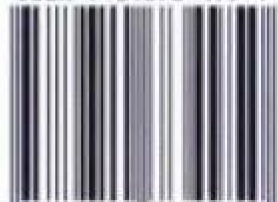
FENXI LIXUE

主编 韩广才 李鸿 商大中

主审 张耀良

哈尔滨工程大学出版社

责任编辑/张石宁　封面设计/李晓民



ISBN 7－81073－495－4

O · 437　定价：16.50元

分 析 力 学

主编　韩广才　李　鸿　商大中

主审　张耀良

哈尔滨工程大学出版社

前　　言

本书是我校"十五"教材建设规划重点资助教材之一。适用于工程力学系工程力学专业的教学需要，是一本简明扼要重点突出偏重工程应用的教材。

在编写过程中，编者广泛地收集了有关资料，进行了同类教材的对比研究，吸取了它们的精华。在反映分析力学研究的最新进展方面也做了一些有益的尝试，力求把握教材的科学性、系统性和适用性。

由于分析力学内容丰富，而且比较抽象，不同类型的教材其难易程度差异比较大，同时考虑到本专业的学时所限，我们设想编写出一本简明扼要，重点突出的教材。但限于编者水平的不足，加之时间又十分仓促，所以书中难免有疏漏和不妥之处，敬请同行专家和读者指正。

本书由韩广才、李鸿、商大中主编。韩广才编写第4～6章；李鸿编写第1～2章，商大中编写第3章。李鸿承担了书中图表的设计工作和全部习题收集整理及打字任务。最后由韩广才对全书在文字上作了统一修改定稿。

本书主审、导弹工程系张耀良教授在百忙中认真审阅了全部初稿，并提出了许多宝贵意见。

在成书的过程中还得到了我校有关同志的热情帮助，从教材结构的安排到具体内容，都提出了不少中肯的建议，使我们受益匪浅，在此一并致以诚挚的谢意。

编　者

2003年7月

图书在版编目(CIP)数据

分析力学/韩广才,李鸿,商大中主编.—哈尔滨:
哈尔滨工程大学出版社,2003
ISBN 7-81073-495-4

Ⅰ.分…　Ⅱ.①韩…②李…③商…　Ⅲ.分析力
学　Ⅳ.O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 060295 号

内容简介

本书系统全面地阐述了分析力学的基本内容。全书共分六章,第一章介绍了分析力学的基本概念,第二章详细介绍了动力学的普遍方程和拉格朗日方程,第三章重点介绍了拉格朗日方程在各方面的应用,第四章介绍了哈密顿正则方程,第五章介绍了哈密顿变分原理,第六章介绍了非完整系统动力学方程。每章末均附有习题。

本书可作为大学力学专业及工程专业高年级学生的教材或教学参考书,亦可供有关专业的工程技术人员参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328　邮编:150001
新华书店经销
哈尔滨工程大学印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm　1/16　印张 12.75　字数 315 千字
2003 年 12 月第 1 版　2003 年 12 月第 1 次印刷
印数:1—1 000 册
定价:16.50 元

目　录

固定点 o 所引的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 或直角坐标 x_i, y_i, z_i 所确定，为了简单计，有时也将系统的所有坐标按统一序号记为 $x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$。这样第 i 个质点的坐标为 $x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}$。各质点的位置确定以后，这时整个系统的位置和形状也就确定了，我们称之为位形。系统运动时位形也将随时间不断发生变化。

2. 约束

系统运动时如果各质点的位置、速度等受到一定的限制，则称这种限制为约束。

例如：① 用一根无质量的刚性杆连接两个小球（质点），运动时由于刚性杆的存在使两球心的距离始终保持不变。这里刚性杆构成了对质点系统的约束。

② 如导弹追踪目标时，要求其飞行方向这里也就是速度方向应时时对准目标。这里并没有一个具体的实物来限制导弹的飞行速度的方向，这种约束关系是通过导弹的控制系统来实现的。

3. 约束方程

从上面的两个例子中我们可以看出约束的形式和机理是不同的，但它们却有共同的本质，那就是使得系统中的某些或全部质点的位置、速度等一些运动学要素受到了一定的限制，换句话说这些运动学要素必须满足一定的条件，这种条件可以用下面一般形式的数学方程来统一表示，即

$$f_\alpha(x, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, l) \tag{1-1}$$

或

$$f_\beta(x, \dot{x}, t) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{1-2}$$

其中 x 是 $x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$ 的全体，$\dot{x}$ 中的 · 表示该字母的量对时间的导数（如 $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$），而 $\dot{x}$ 则是 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_{3N}$ 的全体（这种用一个不带下标的字母代表有下标的同一字母的全体的简化记法今后将一直采用，不再作说明）。

我们将这种用来描述约束关系的数学方程(1－1)或式(1－2)称为约束方程。有时为了简便起见也将约束方程(1－1)表示成如下的矢径形式：

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, l) \tag{1-3}$$

或

$$f_\beta(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{1-4}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是质点的矢径，代表 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ 的全体。

例 1－1　如图 1－1 所示，一个质点被限制在一个不断膨胀的球面上运动，写出此情况下质点的约束方程。

解　将球的半径记为 $R(t)$，则约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2(t) = 0$$

例 1－2　如图 1－2 所示，用一个不计质量且不断改变长度的细杆将质点 A 与固定点联结，写出此情况下的质点的约束方程。

解　将杆的长度记为 $l(t)$，则约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0$$

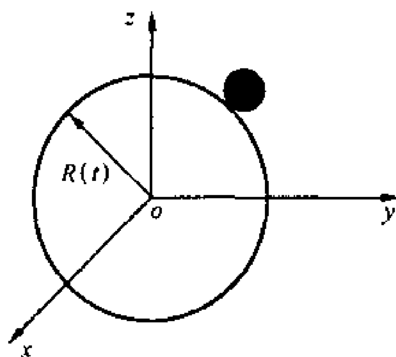


图 1－1

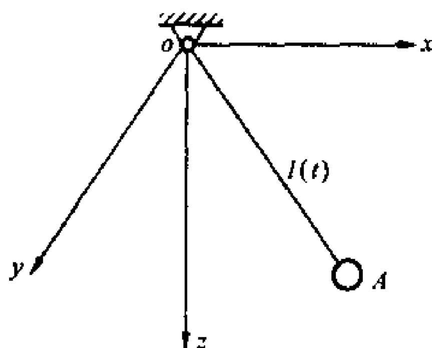


图 1－2

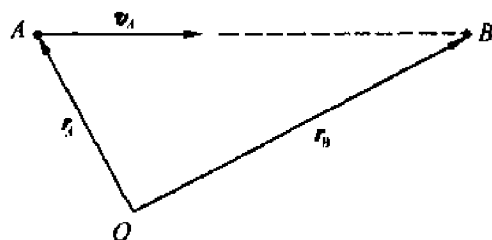


图 1－3

例 1－3 如图 1－3 所示，导弹 A 追击目标 B，要求导弹速度方向总指向目标，试写出约束方程。

解 系统由 A，B 两个质点组成，位置可用 r_A，r_B 来描述，则速度方向应分别为 $\dot{r}_A$，$\dot{r}_B$，其直角坐标应为 x_A，y_A，z_A，x_B，y_B，z_B 及 $\dot{x}_A$，$\dot{y}_A$，$\dot{z}_A$，$\dot{x}_B$，$\dot{y}_B$，$\dot{z}_B$；根据题义约束方程应这样表示为

$$\frac{r_A}{|\dot{r}_A|} = \frac{r_B - r_A}{|\dot{r}_B - \dot{r}_A|}$$

实际计算时我们应将上式向三个坐标轴方向上投影，这样有

$$\frac{1}{|\dot{r}_A|}\dot{x}_A = \frac{1}{|\dot{r}_B - \dot{r}_A|}(x_B - x_A)$$

$$\frac{1}{|\dot{r}_A|}\dot{y}_A = \frac{1}{|\dot{r}_B - \dot{r}_A|}(y_B - y_A)$$

$$\frac{1}{|\dot{r}_A|}\dot{z}_A = \frac{1}{|\dot{r}_B - \dot{r}_A|}(z_B - z_A)$$

也可将上面三式写成如下更为简单的形式：

$$\left(\frac{1}{x_B - x_A}\right)\dot{x}_A - \left(\frac{1}{y_B - y_A}\right)\dot{y}_A = 0$$

$$\left(\frac{1}{x_B - x_A}\right)\dot{x}_A - \left(\frac{1}{z_B - z_A}\right)\dot{z}_A = 0$$

1.1.2 约束的分类

从例 1－1 和例 1－2 中我们可以看出两个结构不同的约束却有着相同的约束方程，在分析力学中，由于我们关心的是各质点间的位置、速度等所应满足的关系，而不是约束的具体结构，因而对于例 1－1 和例 1－2 中的两种约束也就无需区别，也就是说，今后所说的约束，仅是指约束方程而言，而不追究其具体结构。因而约束的分类我们自然也就是完全按约束方程的不同类型而区分。

1. 完整约束和非完整约束

完整约束——在约束方程(1－1)或(1－3)中如果仅含坐标 x 和时间 t，而不含速度 $\dot{x}$ 时，这时的约束称为完整约束或几何约束。

这也就是说完整约束只限制系统各质点的位置而不限制速度，完整约束的约束方程具有如下的数学表达式：

$$f_\alpha(x,t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

或

$$f_\alpha(\boldsymbol{r},t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-3}$$

非完整约束——在约束方程(1-2)或(1-4)中既含有坐标 x 和时间 t，又含有速度 $\dot{x}$ 时，这时的约束称为非完整约束。

这也就是说非完整约束对于各质点的速度也进行了限制，非完整约束的约束方程具有如下的数学表达式：

$$f_\beta(x,\dot{x},t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-2}$$

或

$$f_\beta(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-4}$$

也就是说系统除了位形受到限制外，系统中各质点坐标对时间的导数(速度、加速度等)也受到了一定的限制。在非完整约束中最简单也是最常见的一种情况是所谓的“一阶线性非完整约束”——其特点是仅速度受到限制，且约束方程中被限制的速度以线性项的形式出现，即

$$\sum_{s=1}^{3N}A_{\beta s}\dot{x}_s+A_\beta=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-5}$$

上式中的 $A_{\beta s}$，A_β 都是 x，t 的函数。

这样我们上面讲的例题中例1-1和例1-2中的约束应为完整约束，例1-3中的约束应为一阶线性非完整约束。

例1-4 如图1-4所示，冰刀在平面上滑动，冰刀中点的速度始终沿冰刀的轴线方向，试写出冰刀所受的约束方程。

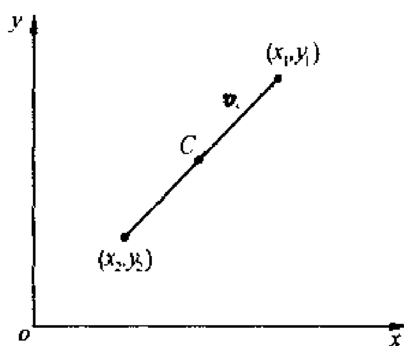


图1-4

解 我们采用笛卡尔坐标，冰刀的位置由冰刀两端点的坐标来描述记为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)。首先来看这两组描述系统位形的坐标受到了哪些限制即约束。设冰刀的长度为 l，则有

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0 \tag{a}$$

另外，冰刀中点的速度始终沿冰刀的轴线方向，设冰刀中点的坐标为(x,y)，则有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

根据题意应有约束方程

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

即

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2}$$

整理可写成

$$(y_1-y_2)\dot{x}_1+(y_1-y_2)\dot{x}_2+(x_2-x_1)\dot{y}_1+(x_2-x_1)\dot{y}_2=0 \tag{b}$$

式(a) 是完整约束，式(b) 是一阶线性非完整约束。

在本书中以后如无特别说明，非完整约束均指一阶线性非完整约束。

对于非完整约束方程式(1-2) 也常常写成微分的形式

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{\beta} \mathrm{d}x_s + A_{\beta}\mathrm{d}t = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-6}$$

因此，非完整约束有时又称为微分约束，如果微分约束可积成有限形式，如：$f_{\beta}(x,t) = C_{\beta}$，$(\beta = 1,2,\cdots,g)$ 其中 C_{β} 是积分常数，这种微分约束可称为可积微分约束，它实质上就是完整约束，因此，在以后我们所说的微分约束都是指不可积的微分约束。

有时也需要将完整约束(1-1) 写成微分约束的形式，只要将(1-1) 式微分处理即可：

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_s}\mathrm{d}x_s + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,l) \tag{1-7}$$

若将式(1-7) 看成是微分约束，那么它们就是可积微分约束。

下面再定义两个概念：

① 完整系统 —— 只有完整约束的系统称为完整系统；

② 非完整系统 —— 具有非完整约束的系统称为非完整系统。

完整系统不能任意占据空间位置，这是因为完整系统对系统各点的位置加上了限制。若系统只有非完整约束，则系统可以占据空间的任何位置，但在这些位置上各点的速度都要受到非完整约束的限制。

2. 定常约束和非定常约束

定常约束 —— 当约束方程中不显含时间时，称这种约束为定常约束。

非定常约束 —— 当约束方程中显含时间时，称这种约束为非定常约束。

其约束方程分别为：

定常约束：

$$f_{\alpha}(x) = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,l) \tag{1-8}$$

$$f_{\beta}(x,\dot{x}) = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-9}$$

非定常约束：

$$f_{\alpha}(x,t) = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

$$f_{\beta}(x,\dot{x},t) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-2}$$

另外再定义两个概念：

① 定常系统 —— 只具有定常约束的系统称为定常系统；

② 非定常系统 —— 具有非定常约束的系统称为非定常系统。

3. 单面约束和双面约束

双面约束 —— 在约束方程中，用等式表示的约束称双面约束；

单面约束 —— 约束方程如果用不等式表示，则称单面约束。

例 1-5　一单摆由质量为 m，长为 l 的轻杆组成，悬挂点以 $y = u(t)$ 运动如图 1-5 所

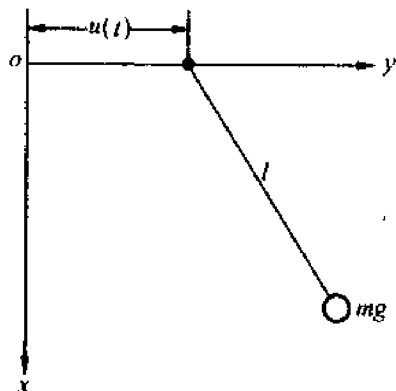


图 1-5

示，试列写问题的约束方程，并说明约束是完整的还是非完整的，是定常的还是非定常的，是双面的还是单面的？

解　设摆的坐标为(x_m, y_m)，则约束方程为

$$x_m^2 + (y_m - u(t))^2 = l^2$$

$$x_m^2 + y_m^2 - 2y_m u(t) = l^2 - u^2(t)$$

约束是完整的、非定常的、双面的。

1.2　广义坐标、广义速度和广义加速度

在上面的讨论中，我们确定系统的位形均采用了笛卡尔坐标，也就是用了这样一组参数，$x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$，那么描述系统的位形是否一定要用这样 $3N$ 个参数呢？很显然不一定非得要这样做，如图 1－6 所示的机构，确定系统的位形只要用一个角度 φ 就可以了。对于图 1－7，确定系统位形所需要的坐标可以用两个角度 α 和 β。这些参数就不是通常意义上的直角坐标了，但它们同样可以描述系统的位形，而且数目明显要比用直角坐标参数描述要少得多。由此，可以看出直角坐标存在着某种不平衡性（有的独立有的不独立）。下面我们从理论上来具体阐述一下广义坐标的定义。

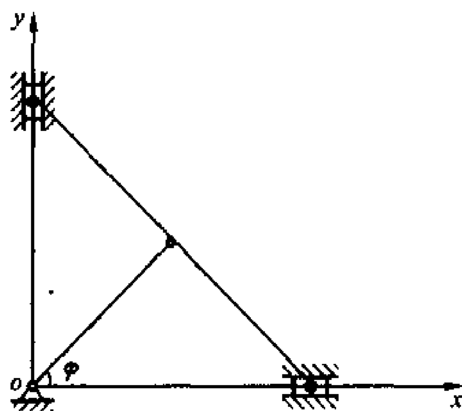


图 1－6

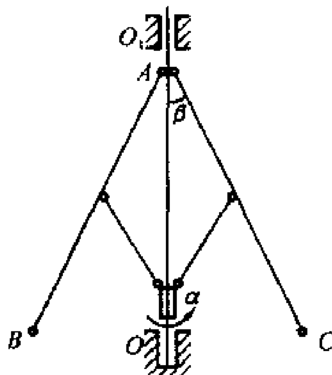


图 1－7

1.2.1　笛卡尔坐标的不平衡性

设有由 N 个质点组成的完整系统，其约束方程为

$$f_\alpha(x, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, l < 3N) \tag{1-1}$$

如果这些方程是相互独立的，则按线性代数的理论，其 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_l)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{3N}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \frac{\partial f_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_{3N}}\end{bmatrix} \tag{1-10}$$

的秩为 l,则按隐函数存在定理由方程组(1 - 1)可以将 l 个坐标作为 t 及其余 $3N-l$ 个坐标的函数解出来,不失一般性,假定被解出的是前 l 个坐标,即

$$x_1 = x_1(x_{l+1},x_{l+2},\cdots,x_{3N},t)$$
$$x_2 = x_2(x_{l+1},x_{l+2},\cdots,x_{3N},t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_l = x_l(x_{l+1},x_{l+2},\cdots,x_{3N},t)$$

上式表明确定系统在 t 时刻位形的 $3N$ 个坐标中,只有 $n=3N-l$ 个是独立的,其余 l 个是不独立的,这就是说,确定系统在 t 时刻的位形只需要 n 个独立的参数坐标,而不是 $3N$ 个,由于笛卡尔坐标参数的这种不平衡性即有的独立有的不独立,使得在具体问题的处理中,取笛卡尔坐标参数作为确定系统位形的参数往往很不方便。

1.2.2 选取另外一组相互独立的参数表示系统的位形

由于笛卡尔坐标的不平衡性,因此,我们希望根据系统的具体结构选取另外一组 $n=3N-l$ 个独立的参数 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 来确定系统的位形。这是完全可以做到的,例如,可以任取 $n=3N-l$ 个函数

$$f_{l+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{3N}) = q_1$$
$$f_{l+2}(x_1,x_2,\cdots,x_{3N}) = q_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{3N}(x_1,x_2,\cdots,x_{3N}) = q_n$$

使它们与 l 个约束方程

$$f_\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

相互是独立的,即 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_{3N})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})}\neq 0 \tag{1-11}$$

按隐函数存在定理,若令(1 - 1)式左端诸函数等于 $q_{n+\alpha}(\alpha=1,2,\cdots,l)$ 即

$$f_\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_{3N},t)=q_{n+\alpha} \tag{1-12}$$

则可解出

$$x_s = x_s(q_1,q_2,\cdots,q_n,q_{n+1},\cdots,q_{n+l},t) \quad (s=1,2,\cdots,3N) \tag{1-13}$$

再注意到 $q_{n+\alpha}=0$ 则有

$$x_s = x_s(q_1,q_2,\cdots,q_n,t) \qquad (s=1,2,\cdots,3N) \tag{1-14}$$

这是 q 到 x 的一组变换式,利用约束条件(即约束方程)可对 x 和 q 进行一对一地变换,这样我们就可以用任意取值的独立变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 来表示系统的位形,由式(1 - 14)式表明

这 n 个相互独立的参数同样满足约束方程，而且由这 n 个参数所表示的系统的位形也必是约束所允许的。

(1－14) 式也可以简写为向量形式：

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{1-15}$$

由式(1－14)、式(1－15)可知 x 或 $\boldsymbol{r}$ 是 q, t 的单值函数，由此可知，只要给定 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 一组参数，便决定了系统在 t 时刻的为约束所允许的一个位形。

1.2.3 广义坐标的定义

由上面的讨论可知 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 确是确定系统位形的独立参数，我们将这样一组参数称做广义坐标。

它们是决定系统位形所必需的、最少的独立参数。它们的数目是 $n = 3N - l$。

到目前为止我们用 n 个相互独立的参数即同样可以表示系统的位形了，而且也是为约束所允许的位形，那么也就是说由 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 所决定的 x 必满足约束方程，且 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 之间是相互独立的。

$$f_\alpha(x, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, l) \tag{1-1}$$

所以采用了广义坐标之后就没有必要再考虑完整约束了，这正是采用广义坐标的优点之一。

1.2.4 广义坐标的选取

上面我们详细阐述了什么是广义坐标，但在具体的问题中广义坐标的选取，往往并不需要按上述方式通过一组代数方程来选定，而是根据系统的结构和问题的要求凭直观判断选取确定系统位形所需的 n 个最少的独立参数，而且这样一组 n 个独立的参数并不是惟一的，可以有多组，然后择优选用。这 n 个独立的参数不再是通常意上的直角坐标参数了，它们可以是角度坐标、面积坐标或其它可以用来描述位置的参数坐标，总之在数学上它就是一组 n 个相互独立的参数。

确定了独立参数后也可由式(1－14)即 $x_s = x_s(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$，$(s = 1, 2, \cdots, 3N)$ 的一一对应关系来确定系统位形的直角坐标。这样，通过广义坐标范围内的求解再由该式转换成直角坐标范围内的解。

综上所述，对于非自由质点系统原来我们是在直角坐标空间中用初等动力学的知识来研究问题，现在我们可以换到另外一个空间即广义坐标空间中同样可以研究系统的位形及其运动，其最直接的好处就是所用的坐标参数减少了，而且不必再考虑完整约束了。

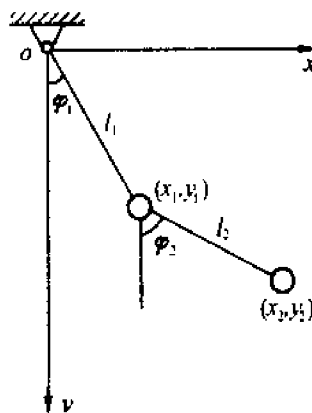


图 1－8

例 1－6 如图 1－8 所示的双摆，由两个质点 M_1，M_2 用长度为 l_1 及 l_2 的刚性杆铰接而成，试选取广义坐标来描述系统的位形。

解 如图约束方程有两个

$$x_1^2 + x_2^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

由于是平面问题所以独立的参数个数应为 $n = 2N - l$

1.3 可能位移、实位移和虚位移

1.3.1 可能位移及实位移

1. 可能位移

设在由 N 个质点组成的系统上作用 l 个完整约束和 g 个一阶线性非完整约束，将这些约束统一写成微分形式：

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ri}\mathrm{d}x_i + A_r\mathrm{d}t = 0 \qquad (r = 1,2,\cdots,l+g) \tag{1-19}$$

当 $(r = 1,2,\cdots,l)$ 时有

$$A_{ri} = \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \qquad A_r = \frac{\partial f_r}{\partial t}$$

则对给定的 t 和 x，满足上述方程的无限小位移 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_{3N}$ 称为系统在时刻 t 由位形 x 出发，在 $\mathrm{d}t$ 时间内的可能位移。也就是说是约束所允许的无限小位移，也是系统有可能实现的位移。

如图 1－9、图 1－10 所示的约束所允许的无限小位移就是可能位移。

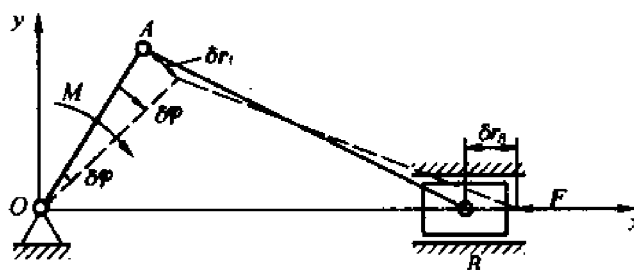
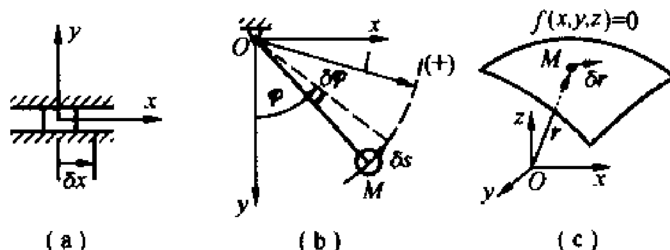


图 1－9



(a)　(b)　(c)

图 1－10

图 1－9 中 B 点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B$ 和 A 点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A$；图 1－10 中沿 x 轴的 $\mathrm{d}x$、沿圆弧线 $\mathrm{d}s$ 以及沿曲面任一切线的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，这些都是约束所允许的无限小位移，也是系统可能实现的位移。因而对于图 1－10(b) 中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在曲面 M 点处可沿曲面任一切线方向，所以可能位移不是惟一的。对于图 1－10(a) 如果滑道随时间而上下移动，则滑道所允许的可能位移仍为水平的 $\mathrm{d}x$。

另外，将上式(1－44)写成

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ri}\dot{x}_i + A_r = 0 \qquad (r = 1,2,\cdots,l+g) \tag{1-20}$$

这样将满足该式的 $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_{3N}$ 称为系统的可能速度；同样将满足约束方程的运动

1.3.3 用广义坐标表示的虚位移

设表示一力学系统位形的广义坐标为 $q_1,q_2,\cdots,q_n$，根据变换式 $x_s = x_s(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$ 可得到各质点的实位移为

$$dx_s = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial x_s}{\partial t}dt \qquad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{1-28}$$

各质点的虚位移同样可得为

$$\delta x_s = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{1-29}$$

或

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{1-30}$$

1.3.4 自由度数目

系统的自由度数目等于独立坐标变分的个数。用字母 m 表示。

1. 对于完整系统

$$m = 3N - l = n \tag{1-31}$$

即对于完整系统自由度数等于广义坐标的个数。

2. 对于非完整系统

由广义坐标表示的约束方程

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}\dot{q}_j + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-18}$$

我们可将其写为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}dq_j + a_\beta dt = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-32}$$

同样可以写出

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}dq_j' + a_\beta dt = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-33}$$

式(1-32)、式(1-33)两式相减有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}(dq_j' - dq_j) = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-34}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-35}$$

所以

$$m = n - g = 3N - l - g \tag{1-36}$$

综上所述，对于完整系统，n 个广义坐标q_j 是互相独立的，它们的变分 δq_j 也是互相独立的；对于非完整系统，广义坐标 q_j 仍保持独立，但它们的变分并非相互独立，而受到 g 个约束方程的限制：$\sum_{j=1}^{n}a_{rj}\delta q_j = 0 \quad (r = 1,2,\cdots,g)$，也就是说广义坐标的变分之间不是相互独立的。所以系统的自由度数目定义为独立的广义坐标变分的个数。

例1-7 如图1-11所示,一长为 l 的杆子两端在半径为 R 的铅垂固定圆环上运动,试列写杆子的约束方程、虚位移方程、并指出系统的自由度数目。

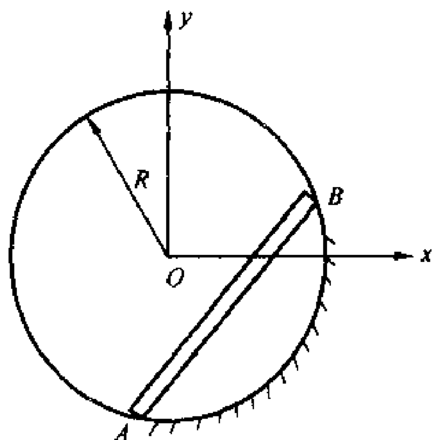


图1-11

解 设杆两端坐标为 (x_A, y_A),(x_B, y_B)。约束方程有三个:

$$x_A^2 + y_A^2 = R^2$$

$$x_B^2 + y_B^2 = R^2$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2$$

虚位移方程为

$$x_A\delta x_A + y_A\delta y_A = 0$$

$$x_B\delta x_B + y_B\delta y_B = 0$$

$$(x_A - x_B)(\delta x_A - \delta x_B) + (y_A - y_B)(\delta y_A - \delta y_B) = 0$$

自由度数目 $m = 2\times2-3 = 1$。

例1-8 质点 m_1 和 m_2 由一长为 l 的刚性杆连接,已知系统做平面运动。当杆运动时,其中点 C 的速度永远保持沿杆的方向,如图1-12所示。试讨论本系统的自由度数目。

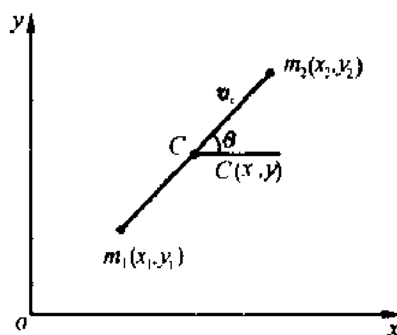


图1-12

解 取杆中点 C 的坐标 (x, y) 及杆与 x 轴的夹角 θ 为广义坐标,则直角坐标和广义坐标之间的变换式为

$$x_1 = x + \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$y_1 = y + \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$x_2 = x - \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$y_2 = y - \frac{l}{2}\sin\theta$$

完整约束方程为

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0$$

非完整约束方程为

$$\dot{y} = \dot{x}\tan\theta$$

虚位移方程为

$$\delta y = \delta x\tan\theta$$

系统的广义坐标数为

$$n = 2\times2 - \text{完整约束方程的个数} = 3$$

在本题中广义坐标已选为 x,y 及 θ,但这三个坐标之间存在一个变分关系式 $\delta y = \delta x\tan\theta$。这就是说虚位移 δx 和 δy 之间不是相互独立的,故系统的自由度数目为

$$\boldsymbol{R}_1\cdot\delta\boldsymbol{r}_P+\boldsymbol{R}_2\cdot\delta\boldsymbol{r}_Q=\boldsymbol{R}_1\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P'-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P)+\boldsymbol{R}_2\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_Q'-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_Q)=$$
$$\boldsymbol{R}_1\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P'-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_Q')-\boldsymbol{R}_1\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_Q)=0 \quad (1-40)$$

4. 刚性约束

设有质点 P_1 及 P_2，与质量不计而且不变形的刚性杆相联结。设质点加在杆上的力分别为 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$，如图 1－15。由于杆的质量不计，故有 $\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2=0$。

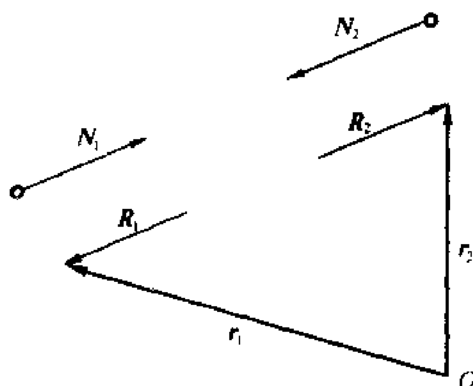


图 1－15

由相对于质心的动量矩定理可知，$\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$ 对杆上任一点之主矩为零，即 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$ 沿杆子方向作用，大小相等，方向相反。根据作用反作用定律，杆子对质点的约束力 $\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$ 分别与 $\boldsymbol{N}_1$，$\boldsymbol{N}_2$ 大小相等，方向相反，即 $\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2=0$ 设 P_1，P_2 的矢径分别为 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，则 $\boldsymbol{R}_2=-\boldsymbol{R}_1=\lambda(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$（$\lambda$ 是比例系数）。约束力的虚功为

$$\boldsymbol{R}_1\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+R_2\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=\lambda(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\cdot\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\lambda\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2=0 \quad (1-41)$$

这是因为 $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2=l^2$（$l$ 是杆长）是不会改变的。即刚性轻杆的约束力的虚功之和为零。不可伸长的软绳也属于这种情况。

刚体可以看成是任何两个质点都由刚性轻杆联结而成的质点系，所以其间的约束力的虚功之和必为零。以后在计算约束力的虚功时，不必再考虑刚体内力之虚功。

5. 两刚体在运动中以其完全粗糙表面相接触（纯滚动）

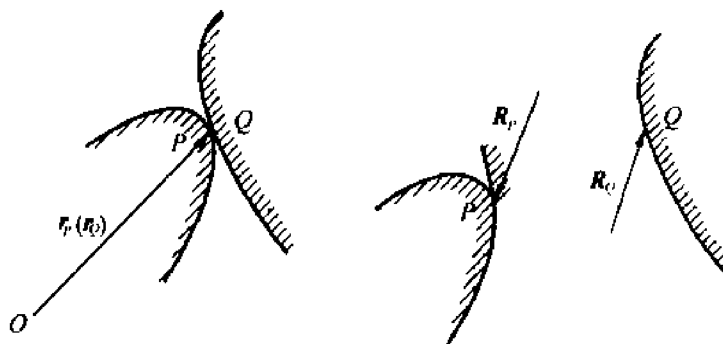


图 1－16

如图 1－16 所示，接触面完全粗糙是指它们不能产生相对滑动，即接触点速度 $\boldsymbol{v}_P$，$\boldsymbol{v}_Q$ 相等。因面约束力的虚功之和

$$\boldsymbol{R}_P\cdot\delta\boldsymbol{r}_P+\boldsymbol{R}_Q\cdot\delta\boldsymbol{r}_Q=\boldsymbol{R}_P\cdot(\delta\boldsymbol{r}_P-\delta\boldsymbol{r}_Q)=$$
$$\boldsymbol{R}_P\cdot[(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P'-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P)-(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_Q'-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_Q)]=$$
$$\boldsymbol{R}_P\cdot[(\boldsymbol{v}_P'-\boldsymbol{r}_Q')-(\boldsymbol{v}_P-\boldsymbol{v}_Q)]\mathrm{d}t=0 \quad (1-42)$$

1.4.3 理想约束

作用于系统上的约束力的虚功之和为零，这种约束为理想约束。所以，上面所介绍的几种约束都是理想约束。

理想约束的数学表达式为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-43}$$

或直角坐标形式为

$$\sum_{s=1}^{3N} R_s \delta x_s = 0 \tag{1-44}$$

综上所述，工程实际中的大多数约束均为理想约束。

1.4.4 虚位移原理

原理 对于具有理想约束的系统其平衡的必要和充分条件是作用在系统上的主动力，在任何虚位移中所作元功之和为零。

数学表达式为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-45}$$

或

$$\sum_{s=1}^{3N} X_s \delta x_s = 0 \tag{1-46}$$

证明 设系统有 N 个质点，由于系统处于平衡状态，因此系统中每个质点均处于平衡状态，由静力学中的二力平衡条件，作用于任一质点 i 上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{R}_i$ 应满足关系式

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i = 0 \tag{1-47}$$

现给系统各个质点以虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$，这样有

$$(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-48}$$

对上式求和有

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-49}$$

将上式展开，并考虑到是理想约束式(1～43)，则有

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-50}$$

1.4.5 虚位移原理应用举例

例 1-9 如图 1-17 所示椭圆规，连杆 AB 长为 l，所有构件重不计，摩擦力忽略不计。求在图示平衡位置时，主动力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_Z$ 间的关系。

解 研究整个机构平衡，系统的约束为理想约束，取坐标轴如图所示。根据虚位移原理，可建立主动力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 的虚功方程

$$F_A \delta r_A - F_B \delta r_B = 0 \tag{a}$$

为解此方程，必须找出两个虚位移 δr_A 与 δr_B 之间的关系，由于 AB 杆不可伸缩，AB 两点的虚位移在 AB 线上的投影应该相等，由图 1－17 有

$$\delta r_B \cos\varphi = \delta r_A \sin\varphi$$

或

$$\delta r_A = \delta r_B \cot\varphi \qquad \text{(b)}$$

将式(b)代入式(a)，解得

$$(F_A \cot\varphi - F_B)\delta r_B = 0$$

因 δr_B 是任意的，因此有

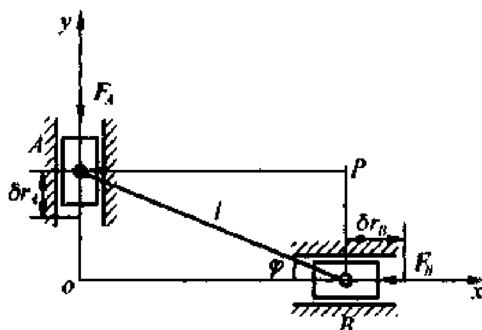


图 1－17

$$F_A \cot\varphi = F_B$$

另外虚位移之间的关系也可以这样找，首先列出系统的约束方程，即

$$y_A^2 + x_B^2 = l^2 \qquad \text{(c)}$$

对(c)式两边取变分(方法同微分)有(考虑了实际情况)

$$-2y_A\delta y_A + 2x_B\delta x_B = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\delta y_A = \cot\varphi\delta x_B$$

代入(a)式中可得同样结果。

若不考虑实际情况变分为

$$2y_A\delta y_A + 2x_B\delta x_B = 0 \qquad \text{(e)}$$

或这样计算虚位移间的关系：

$$y_A = l\sin\varphi \qquad \delta y_A = l\cos\varphi\delta\varphi$$

$$x_B = l\cos\varphi \qquad \delta x_B = -l\sin\varphi\delta\varphi$$

两式之比同样为(e)式，这时应注意列虚功方程时主动力是一个代数量，式(a)变成

$$-F_A\delta r_A - F_B\delta r_B = 0 \qquad \text{(f)}$$

将(e)式代入(f)式可得同样结果。

为了求虚位移之间的关系，也可以用所谓"虚速度"法。我们给系统某个虚位移 δr_A，δr_B，如图 1－17 所示，我们可以假想虚位移是在某个极短的时间 $\mathrm{d}t$ 内发生的，这时对应点 B 和点 A 的速度 $\boldsymbol{v}_B = \frac{\delta r_B}{\mathrm{d}t}$ 和 $\boldsymbol{v}_A = \frac{\delta r_A}{\mathrm{d}t}$ 称为虚速度。这样 B，A 两点虚位移大小之比也就等于虚速度大小之比，即

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{v_B}{v_A}$$

杆 AB 作平面运动，P 为其瞬心，由瞬心法可建立 B，A 两点的速度关系

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA} = \tan\varphi$$

因此有

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \tan\varphi$$

代入式(a)，同样解得

因为 $p \neq 0$，则需 $\delta y_c = 0$，即 y_c = 常数

当杆铅垂时，$y_c = \frac{a}{2}$，则在任意位置时

$$y_c = y_A + \frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}a \qquad (1)$$

而

$$x_A = a\sin\varphi \qquad (2)$$

由(1)、(2)两式消去参数 φ，得

$$x_A^2 + (2y_A - a)^2 = a^2$$

侧面呈椭圆形状。

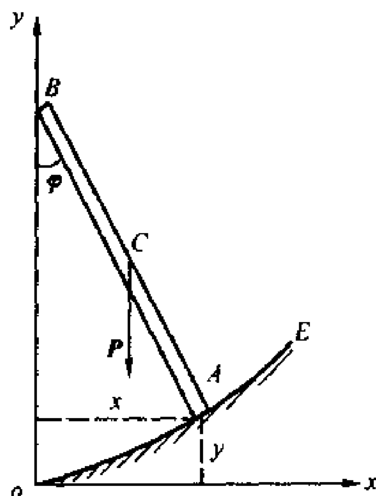


图 1-20

从上面的例子中可以看出，应用虚位移原理可以求解主动力之间的关系，可以求结构中某一支座的约束反力。在求支座反力时，只需解除该支座的约束而代之以约束反力，并给予虚位移，但要注意不破坏结构的其他约束条件。这样在虚功方程中只有一个未知的约束反力，计算大为简化。这个优点在解决一些复杂结构的平衡问题时尤为突出。

从上面的例子中可见，求解虚功方程的关键是要找到各虚位移之间的关系。一般可采用以下三种方法建立各虚位移之间的关系。

(1) 作图法：作图给出机构的微小运动，直接按几何关系，确定各有关虚位移之间的关系。如例 1-11。

(2) 坐标法：确定描述位形的坐标，写出完整约束方程，再对方程求变分；各变分之间的比例，即为各虚位移之间的比例关系。如例 1-9 的第二种解法。

(3) 虚速度法：对于静力系统均为定常系统，所以虚位移也就是可能位移，将可能位移均除以一个时间小量，我们称之为虚速度。显然虚速度之比等于虚位移之比。从而可按运动学的方法，计算各有关点的虚速度。计算虚速度时，可采用运动学中各种方法，如点的合成运动、平面运动基点法、速度投影定理、瞬心法以及给出运动方程再求导数等。

建立虚功方程时，常常用虚位移的绝对值，而按机构的微小运动情况在图上画出虚位移的方向，再确定各项虚功的正或负。当采用坐标方程的变分来计算虚位移的大小时，由于坐标及其变分都是代数量，应注意取其绝对值。这样也可以将力的投影及虚位移都作为代数值，列出虚功的分析表达式，如例 1-9 中的(f)、(e)式。

1.4.6 虚位移原理的广义坐标表达形式

虚位移原理还可写成广义坐标虚位移的表达形式，由关系式

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \qquad (1-15)$$

两边取变分

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (1-51)$$

将其代入虚功原理的数学表达式有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0 \qquad (1-52)$$

另外可将上式记为

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j = 0 \tag{1-53}$$

上式中 δq_j 为广义虚位移，而 $Q_j\delta q_j$ 又具有功的量纲，所以，该式中的 Q_j 称为和广义坐标 q_j 相对应的广义力。

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{1-54}$$

对于完整系统，这 n 个广义坐标的虚位移 δq_j 是相互独立的，并且都是不等于零的微小量，所以由 $\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j\delta q_j = 0$ 应有

$$Q_j = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-55}$$

这就是用广义坐标表示的虚位移原理，即具有理想约束的完整系统，处于平衡的必要和充分条件为：作用在系统上的和每一个广义坐标相对应的主动力的广义力都等于零。

如果质点系具有 N 个自由度，则有 N 个广义力，同时有 N 个相互独立的平衡方程(1－55)。可联立求解一般质点系的平衡问题。工程中的多数机构往往只有一个自由度，所以，只需列出一个广义力等于零的平衡方程即可求其主动力之间的关系。这也正是使用广义力求解质点系平衡问题的优点。

利用广义坐标表示的平衡条件求解实际问题时，关键在于如何表达其广义力。

求广义力通常有两种方法：

1. 利用公式(1－54)计算

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-54}$$

或写为

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} X_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-56}$$

2. 只给质点系一个广义虚位移 δq_j 不等于零，而其它$(N-1)$个广义虚位移都等于零，所有主动力在相应虚位移中所做的虚功的和用 $\sum \delta W_j'$ 表示，则有

$$\sum \delta W_j' = \sum_{j=1}^{n} Q_j\delta q_j = Q_j\delta q_j \tag{1-57}$$

由此可求出广义力

$$Q_j = \frac{\sum \delta W_j'}{\delta q_j} \tag{1-58}$$

在解决实际问题时往往使用这种方法。

例 1－13 杆 OA 和 AB 以铰链相连如图 1－21 所示，$OA = a$，$AB = b$，受力如图，试求平衡时 φ_1，φ_2 与 F_A，F_B，F 之间的关系。

解 用第一种方法：

直角坐标参数：

$$x_A,y_A,x_B,y_B$$

广义坐标参数：

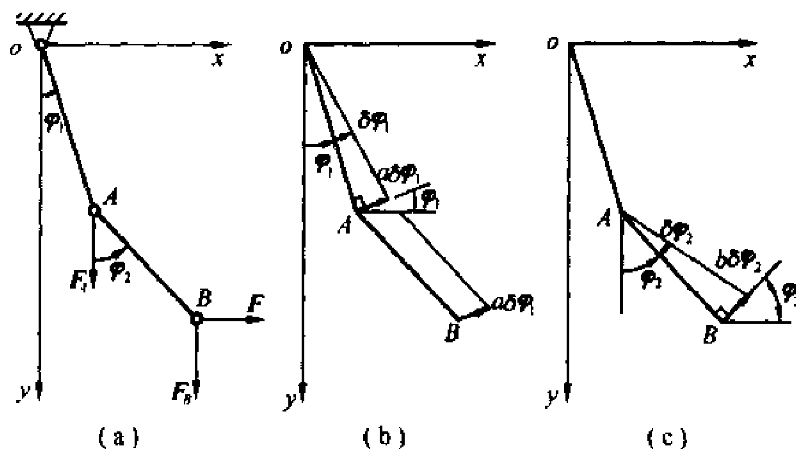


图 1－21

$$\varphi_1, \varphi_2$$

坐标变换关系式：

$$x_A = a\sin\varphi_1$$

$$y_A = a\cos\varphi_1$$

$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$

$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2$$

则按式(1－34)有

$$Q_{\varphi_1} = F_{Ax}\frac{\partial x_A}{\partial \varphi_1} + F_{Ay}\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} + F_{Bx}\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} + F_{By}\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1} \tag{a}$$

$$Q_{\varphi_2} = F_{Ax}\frac{\partial x_A}{\partial \varphi_2} + F_{Ay}\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2} + F_{Bx}\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} + F_{By}\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} \tag{b}$$

$$F_{Ax} = 0,\ F_{Ay} = F_A,\ F_{Bx} = F,\ F_{By} = F_B$$

$$\frac{\partial x_A}{\partial \varphi_1} = a\cos\varphi_1,\ \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} = -a\sin\varphi_1,\ \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} = a\cos\varphi_1,\ \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1} = -a\sin\varphi_1$$

$$\frac{\partial x_A}{\partial \varphi_2} = 0,\ \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2} = 0,\ \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} = b\cos\varphi_2,\ \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} = -b\sin\varphi_2$$

将上式分别代入(a)(b)两式有

$$Q_{\varphi_1} = -(F_A + F_B)a\sin\varphi_1 + Fa\cos\varphi_1 = 0 \tag{c}$$

$$Q_{\varphi_2} = -F_B b\sin\varphi_2 + Fb\cos\varphi_2 = 0 \tag{d}$$

联立(c)(d)式则有

$$\tan\varphi_1 = \frac{F}{F_A + F_B},\qquad \tan\varphi_2 = \frac{F}{F_B}$$

用第二种方法计算。

保持 φ_2 不变，只有 $\delta\varphi_1$ 时，由式(b)的变分可得一组虚位移

$$\delta y_A = \delta y_B = -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1,\quad \delta x_B = a\cos\varphi_1\delta\varphi_1$$

则对应于 φ_1 的广义力为

$$Q_1 = \frac{\sum \delta W_1}{\delta \varphi_1} = \frac{F_A \delta y_A + F_B \delta y_B + F \delta x_B}{\delta \varphi_1}$$

将式(e)代入上式，得

$$Q_1 = -(F_A + F_B) a \sin\varphi_1 + Fa\cos\varphi_1$$

保持 φ_1 不变，只有 $\delta\varphi_2$ 时，由式(b)的变分可得另一组虚位移

$$\delta y_A = 0,\ \delta y_B = -b\sin\varphi_2 \delta\varphi_2,\ \delta x_B = b\cos\varphi_2 \delta\varphi_2$$

代入对应于 φ_2 的广义力表达式，得

$$Q_2 = \frac{\sum \delta W_2}{\delta \varphi_2} = \frac{F_A \delta y_A + F_B \delta y_B + F \delta x_B}{\delta \varphi_2} = \\ = -F_B b\sin\varphi_2 + Fb\cos\varphi_2$$

例1－14　如图1－22所示，重物 A 和 B 分别连接在细绳两端，重物 A 放置在粗糙的水平面上，A，B，C 重量如图。试求平衡时重物 C 的重量 P_C 以及重物 A 与水平面间的滑动摩擦系数。

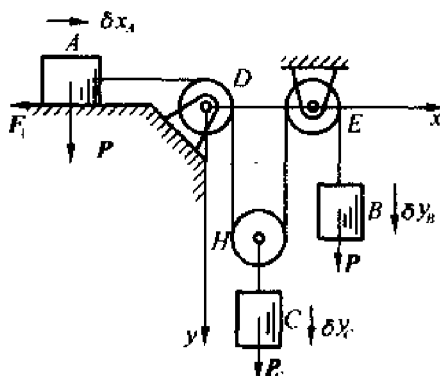


图1－22

解　广义坐标：x_A，y_B

主动力：F_A，$2P$，P_C，P

令 $\delta x_A \neq 0$，$\delta y_B = 0$

有：$\delta y_C = \frac{1}{2}\delta x_A$ 方向向下

主动力所做虚功的和为

$$\sum \delta W_A = -F_A \delta x_A + P_C \delta y_C = \left(-F_A + \frac{1}{2}P_C\right)\delta x_A$$

对应广义坐标 x_A 的广义力为

$$Q_A = \frac{\sum \delta W_A}{\delta x_A} = \frac{1}{2}P_C - F_A \tag{a}$$

再令 δy_B 向下，$\delta x_A = 0$，同理可得

$$Q_B = \frac{\sum \delta W_B}{\delta y_B} = -\frac{1}{2}P_C + P \tag{b}$$

因为系统平衡时应有 $Q_A = Q_B = 0$，解得

$$P_C = 2P, \qquad F_A = \frac{1}{2}P_C = P$$

因此平衡时，要求台面摩擦系数

$$f \geqslant \frac{F_A}{2P} = 0.5$$

1.4.7　应用虚位移原理研究保守系统平衡的稳定性

只有有势力作用的系统称为保守系统，由势能的概念及其计算可知，质点系的势能等于

各质点势能的代数和。质点在势能场中不同的位置，势能的数值不同，因此势能是坐标的函数。

1. 有势力场的性质

设有势力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点从点 M 移到点 M'，如图 1-23 所示，这两点的势能分别为 $V(x,y,z)$ 和 $V(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$，另外有势力的元功可用势能的差计算，即

$$\delta W = V(x,y,z) - V(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z) = -\mathrm{d}V \tag{1-59}$$

由高等数学知，势能 V 的全微分可写为

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-60}$$

于是

$$\delta W = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-61}$$

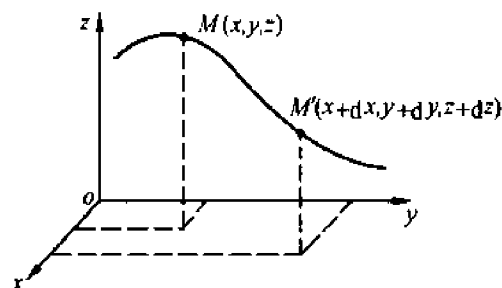


图 1-23

设有势力 $\boldsymbol{F}$ 在直角坐标轴上的投影为 X，Y，Z 则力的元功解析式为

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{1-62}$$

即

$$\delta W = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z \tag{1-63}$$

比较以上两式，得

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{1-64}$$

从该式可知，如果势能函数表达式已知，应用上式可求得作用于物体上的有势力。

如果系统有多个有势力，总势能为 V 可表示为

$$V = V(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\cdots,x_N,y_N,z_N) \tag{1-65}$$

则对于作用点坐标为 x_i,y_i,z_i 的有势力 $\boldsymbol{F}_i$ 其相应的投影为

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad Y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i},\quad Z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \tag{1-66}$$

2. 保守系统的平衡条件

对于保守系统主动力即为有势力，所以由虚位移原理主动力的虚功为

$$\begin{aligned}\sum \delta W_F &= \sum (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \\ &-\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) = \\ &-\delta V\end{aligned} \tag{1-67}$$

这样对于保守系统虚位移原理的表达式成为

$$\delta V = 0 \tag{1-68}$$

上式说明：在势力场中，具有理想约束的质点系的平衡条件为质点系的势能在平衡位置处一阶变分为零。

3. 由广义坐标表示的保守系统的平衡条件

如果有广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 表示质点系的位置，则质点系的势能可以写成广义坐标

的函数,即

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{1-69}$$

有势力的虚功

$$\sum \delta W_F = -\delta V = \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \tag{1-70}$$

其中

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{1-71}$$

这样,由广义坐标表示的平衡条件可写成如下形式

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-72}$$

即在势力场中,具有理想约束的质点系的平衡条件是势能对每一个广义坐标的偏导数分别等于零。

4.保守系统平衡稳定性问题分析

满足平衡条件的保守系统可以处于不同的平衡状态,如图1-24所示的三个小球,就具有三种不同的平衡状态:

(a)图所示小球在一个凹曲面的最低点处平衡,当给小球一个很小的扰动后,小球在重力作用下,仍然会回到原来的平衡位置,这种平衡状态称为稳定平衡。(b)图所示小球在一水平平面上平衡,小球在周围平面上的任一点都可以平衡,这种平衡状态称为随遇平衡。(c)图所示小球在一个凸曲面的顶点上平衡,当给小球一个很小的扰动后,小球在重力作用下会滚下去,不再回到原来的平衡位置,这种平衡状态称为不稳定平衡。

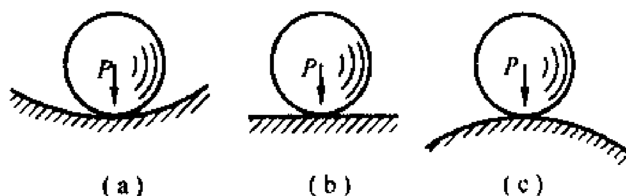


图1-24

上述三种平衡状态都满足势能在平衡位置处 $\delta V = 0$ 的平衡条件,即满足势能对广义坐标的一阶偏导数等于零的条件,即

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \tag{1-73}$$

从图中可以看出,在稳定平衡位置处,当系统受到扰动后,在新的可能位置处,系统的势能都高于平衡位置处的势能,因此,在稳定平衡的平衡位置处,系统的势能具有极小值。系统可以从高势能位置回到低势能位置。相反在不稳定平衡位置上,系统势能具有极大值。没有外力作用时,系统不能从低势能位置回到高势能位置。对于随遇平衡,系统在某位置附近其势能是不变的,所以其附近任何可能的位置都是平衡位置。

对于一个自由度系统,系统具有一个广义坐标 q,因此系统势能可以表示为的一元函数,即 $V = V(q)$。当系统平衡时,在平衡位置处有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q} = 0 \tag{1-74}$$

如果系统处于稳定平衡状态,则在平衡位置处,系统势能具有极小值,即系统势能对广义坐标的二阶导数大于零

重力势能 $V_1 = 2mgR\sin^2\varphi$

弹性势能 $V_2 = \frac{1}{2}c(2R\cos\varphi - l_0)^2$

系统势能

$$V = V_1 + V_2 = 2mgR\sin^2\varphi + \frac{1}{2}c(2R\cos\varphi - l_0)^2$$

系统的平衡条件为$\frac{\partial V}{\partial \varphi}$,即

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 4mgR\sin\varphi\cos\varphi + c(2R\cos\varphi - l_0)(-2R\sin\varphi) =$$

$$2R(2mg\cos\varphi - 2cR\cos\varphi + cl_0)\sin\varphi = 0 \tag{1}$$

因 $2R \neq 0, \sin\varphi = 0, \varphi = 0°$,或

$$2mg\cos\varphi - 2cR\cos\varphi + cl_0 = 0$$

即

$$\cos\varphi = \frac{cl_0}{2(cR - mg)}$$

研究平衡位置的稳定性。有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 4mgR\cos2\varphi - 4cR^2\cos2\varphi + 2Rcl_0\cos\varphi \tag{2}$$

当 $\varphi = 0$ 时,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 2R(2mg - 2cR + cl_0) > 0$$

即

$$cl_0 > 2(cR - mg)$$

系统稳定。

当 $\varphi = \cos^{-1}\frac{cl_0}{2(cR - mg)}$ 时,因

$$\cos2\varphi = (2\cos^2\varphi - 1) = \left[2\left(\frac{cl_0}{2(cR - mg)}\right)^2 - 1\right] =$$

$$\left[\frac{c^2 l_0^2}{2(cR - mg)^2} - 1\right]$$

代入(2)式,经化简得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{4(cR - mg)^2 - c^2 l_0^2}{(cR - mg)} > 0$$

设 $cR \neq mg$

$$c^2 l_0^2 < 4(cR - mg)^2 \text{ 或 } cl_0 < 2(cR - mg)$$

系统稳定。

例 1-17 如图 1-27 所示一均质杆 AE,长 $2a$,依于曲线导板上,导板形状是一半径为 R 的半圆,不计摩擦,求其平衡位置并讨论其稳定性。

解 取 o 点为势能零点,转角 φ 为广义坐标。设 AB 重为P,因

$$x_C = AD\sin\varphi - AC\sin\varphi =$$

$$2R\cos\varphi\sin\varphi - a\sin\varphi$$

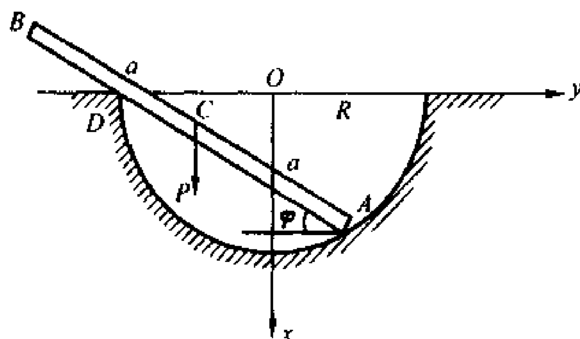


图 1-27

重力势能

$$V = -Px_C = -P(R\sin2\varphi - a\sin\varphi)$$

平衡条件为$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} = 0$,即

$$-P(2R\cos2\varphi - a\cos\varphi) = 0$$

或

$$2R\cos2\varphi - a\cos\varphi = 0 \tag{1}$$

化简式(1)

$$2R(\cos^2\varphi - 1) - a\cos\varphi = 4R(\cos^2\varphi - \frac{a}{4R}\cos\varphi - \frac{1}{2}) =$$

$$4R\left[\left(\cos\varphi - \frac{a}{8R}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{a}{8R}\right)^2\right] = 0$$

因 $4R \neq 0$,得

$$\cos\varphi - \frac{a}{8R} = \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{8R}\right)^2} \tag{2}$$

即

$$\cos\varphi = \frac{1}{8R}[a + \sqrt{32R^2 + a^2}]$$

判断平衡位置的稳定性,有

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2} = -P(-4R\sin2\varphi + a\sin\varphi) =$$

$$P\sin\varphi(8R\cos\varphi - a) \tag{3}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\cos\varphi = \frac{1}{8R}(a+\sqrt{32R^2+a^2})} = 8R\left[\frac{1}{8R}(a + \sqrt{32R^2 + a^2})\right] - a > 0$$

即

$$\sqrt{32R^2 + a^2} > 0$$

系统平衡是稳定的。

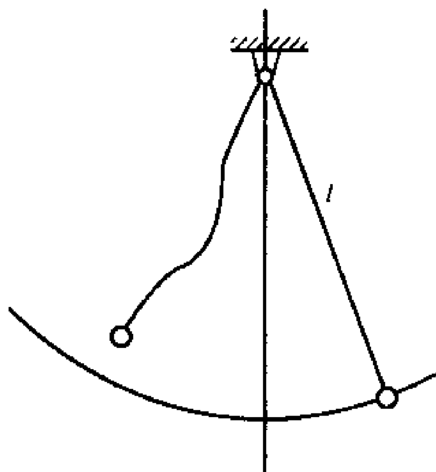
虚位移原理是分析静力学的基础,它是从能量的观点来讨论和研究系统的平衡问题,和初等动力学相比,最显著的特点是不论约束反力如何,都不影响解题的困难程度。

习　　题

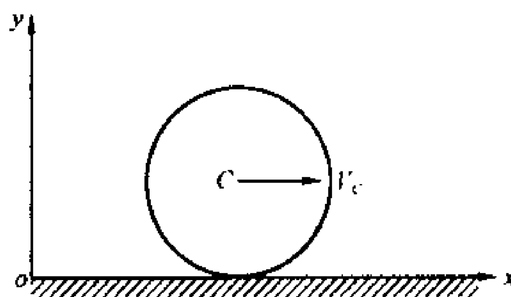
1－1　一柔软不可伸长的线，一端固定，另一端栓一小球。如题图1－1所示小球所受约束是单面的还是双面的？试写出约束方程。

答：单面约束。

约束方程为 $x^2+y^2+z^2 \leqslant l^2$。



题图1－1



题图1－2

1－2　一半径为 r 的圆盘在铅垂平面内沿直线作纯滚动如题图1－2所示。这约束是完整的还是非完整的？试写出约束方程。

答：完整约束。约束方程为 $x_0 = r\theta$。

1－3　一直杆以常角速度 ω 绕铅垂轴转动，杆与铅垂线夹角 α 为常值。杆上有一小环，小环可沿杆滑动。取小环相对杆与铅垂线交点 o 的距离 r 为坐标如题图1－3所示。试将环的直角坐标用 r 表示之。写出直角坐标中的约束方程。

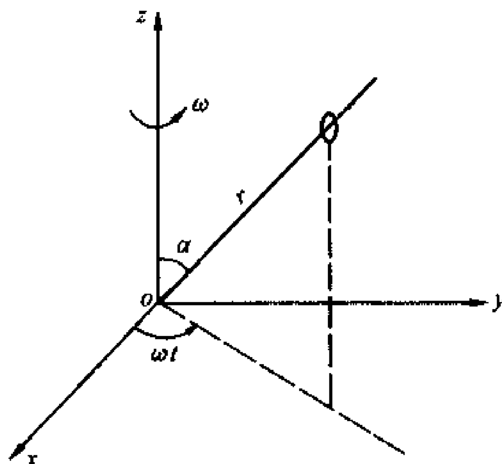
答：$x = r\sin\alpha\cos\omega t$

$y = r\sin\alpha\sin\omega t$

$z = r\cos\alpha$

约束方程为

$y = x\tan\omega t$，　$y = z\tan\alpha\sin\omega t$

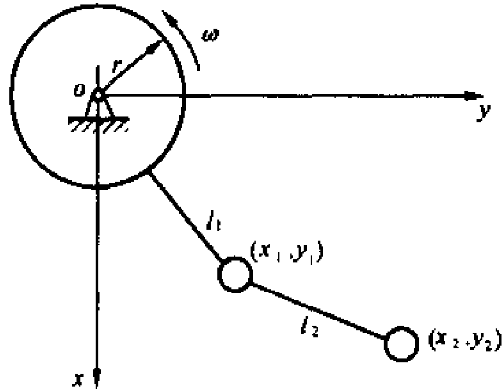


题图1－3

1－4　试列写如题图1－4所示系统的约束方程。

答：设两质点坐标为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，约束方程为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$
$$(x_1 - r\cos\omega t)^2 + (y_1 - r\sin\omega t)^2 = l_1^2$$



题图 1－4

1－5 试判断下列微分约束是完整的还是非完整的？如果是完整的，写出其有限形式。

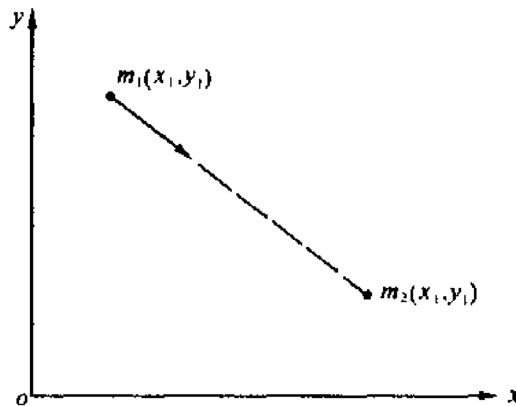
(1) $xz\dot{z} + (y^2 - x^2 - z)\dot{x} + (z - y^2 - xy)\dot{y} = 0$

(2) $\dot{y} - z\dot{x} = 0$

(3) $\dfrac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2}$

(4) $(2x + y + z)\dot{x} + (3y + z + x)\dot{y} + (2z + x + y)\dot{z} = 0$

(5) $e^{x^2}\dot{x} + e^{y^2}\dot{y} + e^{z^2}\dot{z} = 0$

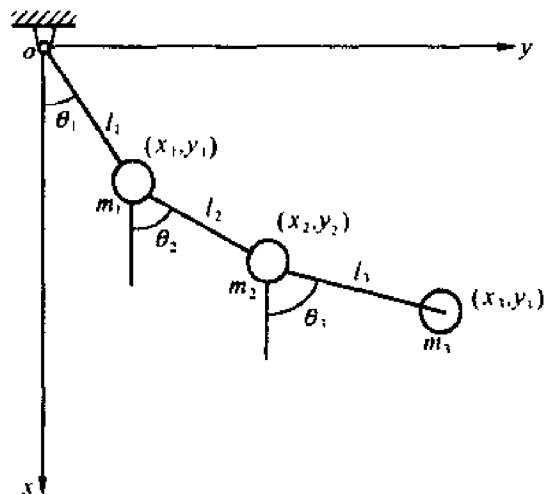


题图 1－6 图

1－6 如题图 1－6 所示，平面上有两质点 m_1 和 m_2，系统运动时 m_1 对 m_2 进行追踪，m_1 的速度始终对准 m_2。试写出约束方程。

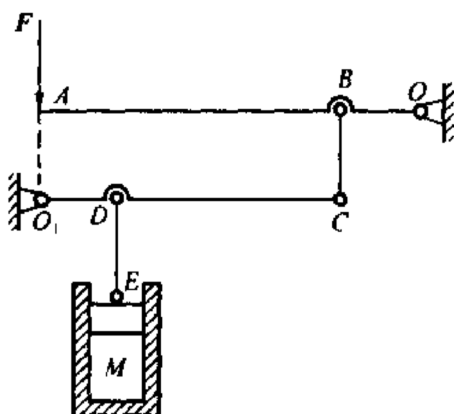
答：$\dfrac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

1－7 如题图 1－7 所示一系统由三个质点组成，用不计质量的长 l_1, l_2, l_3 的细杆顺次联结。试用 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 及其导数表示 $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3$。

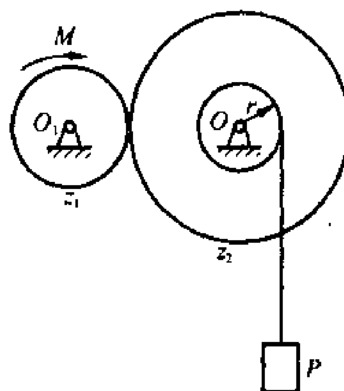


题图 1－7

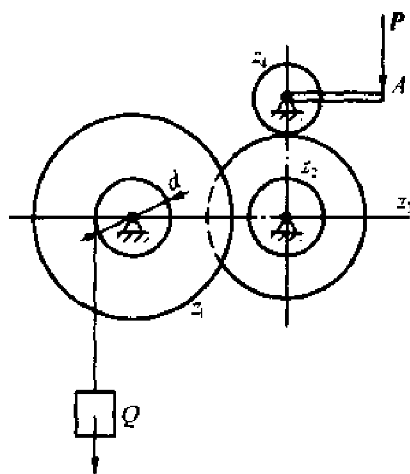
1－8 如题图 1－8 所示长为 l 的均匀细杆被限制在 oxy 平面运动，



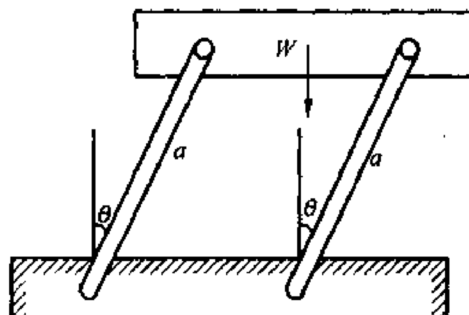
题图 1－10



题图 1－11



题图 1－12



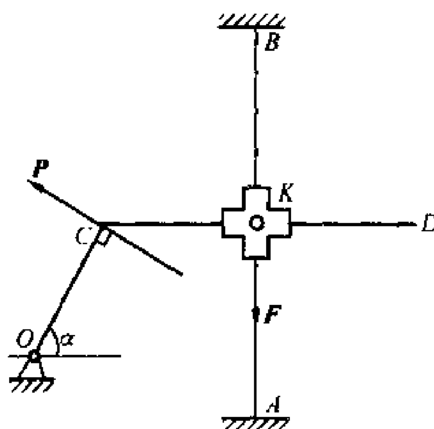
题图 1－13

1－13 如题图 1－13 所示，重 W 的物块由两杆和固连在基础上的扭簧支承。已知扭簧刚度系数为 M_0，扭矩为 $M = M_0\theta$，略去杆重，求平衡时杆的 θ 角。

答：$\theta = \sqrt{6\left(1 - \frac{M_0}{W}\right)}, M_0 < W$

1－14 如题图 1－14 所示在十字形滑块 K 上沿杆 AB 方向作用力 F，不计摩擦，求作用在 C 点且与曲柄 OC 垂直的平衡力 P 的大小。

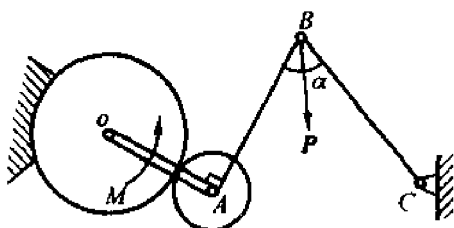
答：$P = F\cos\alpha$



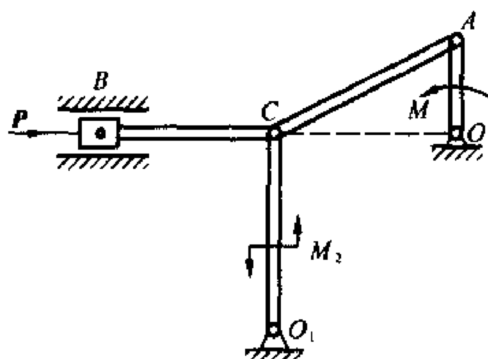
题图 1－14

1－15 如题图 1－15 所示在位于水平面内的机构的 B 点上作用一力 P。为使机构在 $AB \perp OA$，$\angle ABC = 2\alpha$ 的位置上保持平衡，求作用于长为 a 的曲柄 OA 上的力矩 M。

答：$M = \frac{1}{2}Pa\sec\alpha$



题图 1－15



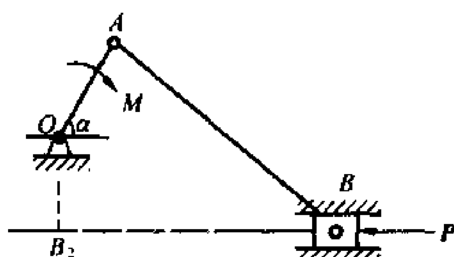
题图 1－16

1－16　如题图 1－16 所示，在机构的活塞 B 上施加一力 P。在曲柄 O_1C 上施加力矩 $M_1 = \frac{3}{2}Pr$，不计摩擦，曲柄长度 $OA = r$，$O_1C = 3r$，且都处于铅垂位置。试求使机构平衡而作用于曲柄 OA 上的力矩 M。

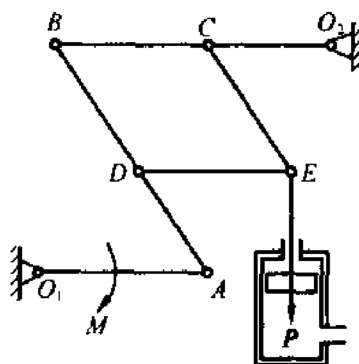
答：$M = \frac{1}{2}Pr$

1－17　如题图 1－17 所示，在侧向外伸曲柄连杆机构的滑块 B 上施加一力 P。当 $\alpha = 60°$，$\angle OAB = 60°$ 时，使机构处于平衡。求作用于长为 r 的曲柄上的力矩 M。

答：$M = Pr\sqrt{3}$



题图 1－17



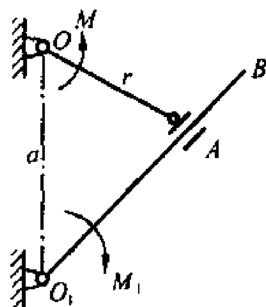
题图 1－18

1－18　在题图 1－18 所示机构中 $O_1A = a$，$BC = DE = b$，$CO_2 = c$，$BD = CE$。若 $O_1A \parallel BO_2$，求作用于活塞上的力 P 与平衡力矩 M 之间的关系。

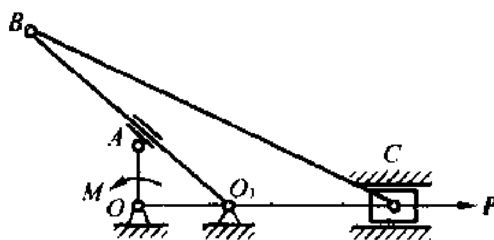
答：$M = \frac{ac}{b+c}P$

1－19　如题图 1－19 所示在连杆机构的曲柄 OA 上作用力矩 M。$OA = r$，$O_1A = OO_1 = a$。不计摩擦，求作用于连杆 O_1B 上的平衡力矩 M_1。

答：$M_1 = 2M\frac{a^2}{r^2}$



题图 1－19



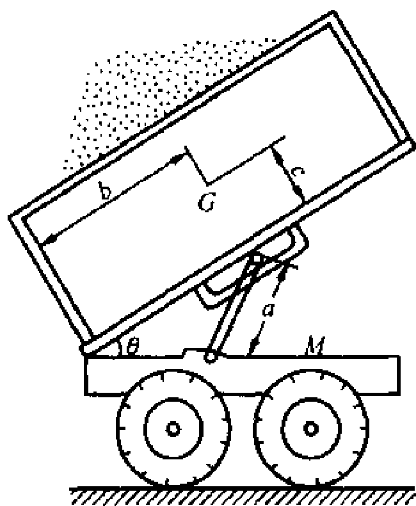
题图 1－20

1－20　如题图 1－20 所示，在曲柄 OA 上作用矩为 $M = 6\text{N}\cdot\text{m}$ 的力偶。$OA = 15\text{cm}$，$OO_1 = 20\text{cm}$，$O_1B = 50\text{cm}$，$BC = 78\text{cm}$。略去摩擦，当 $OA \perp OO_1$ 时，为了使机构处于平衡，求作用在滑块 C 上 P 力的大小。

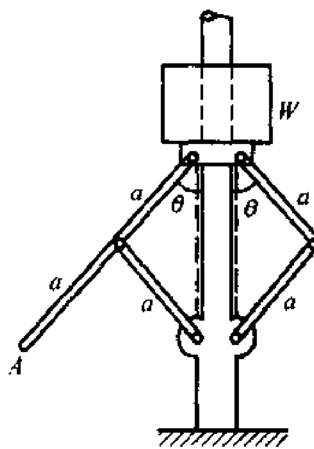
答：$P = 125\text{N}$

1－21　如题图 1－21 所示，自动卸货卡车的载荷为 W，重心在 G，为了举起载荷，在举重杆端部作用一力偶 M，试把 M 表示成 θ 的函数。

答：$M = \left(\frac{W}{2}\right)(b\cos\theta - c\sin\vartheta)$



题图 1－21



题图 1－22

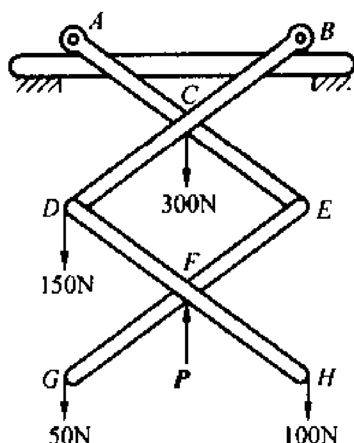
1－22　对如题图 1－22 所示的杠杆机构，为使机构于任何位置 ϑ 都能支持住滑块 W，求作用在 A 点的水平力，(杆重不计)。若在 A 点作用一向下力能否支持住 W？若用一逆时针的力偶 M 来代替力，问 M 需多大？

答：$M = 2Wa\sin\theta$

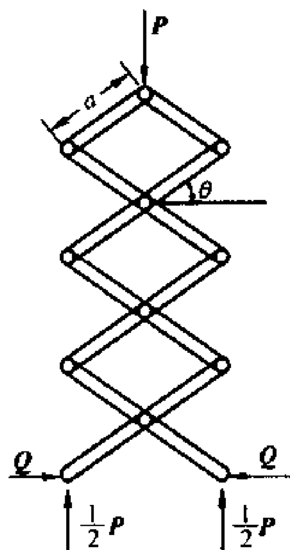
1－23　题图 1－23 示连杆机构，A、B 轮可在水平杆上自由地滑动。求：为保持平衡所

需之 P 力的大小。

答:$P = 400\text{N}$



题图 1 - 23



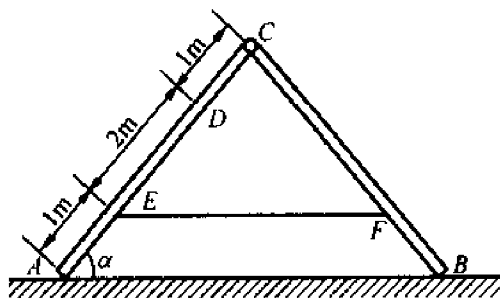
题图 1 - 24

1 - 24　如题图 1 - 24 所示,惰钳由六根长杆和两根短杆组成,长杆长 $2a$,短杆长 a,杆与杆之间用铰链联结。它在顶部受力 P 的作用,问下部力 Q 的大小应为多少才能使系统处于平衡状态?图中 θ 为已知角。

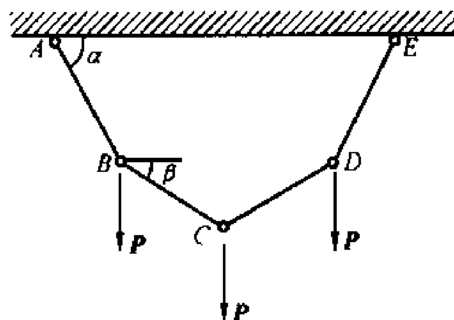
答:$Q = \dfrac{7}{2}P\tan\theta$

1 - 25　如题图 1 - 25 所示,对称梯子搁在光滑的地板上。每半边梯子的重量为 60N,在 D 点上站一重为 800N 的人。求绳索 EF 的张力与 α 角的关系。

答:$T = 440\cot\alpha\,\text{N}$



题图 1 - 25

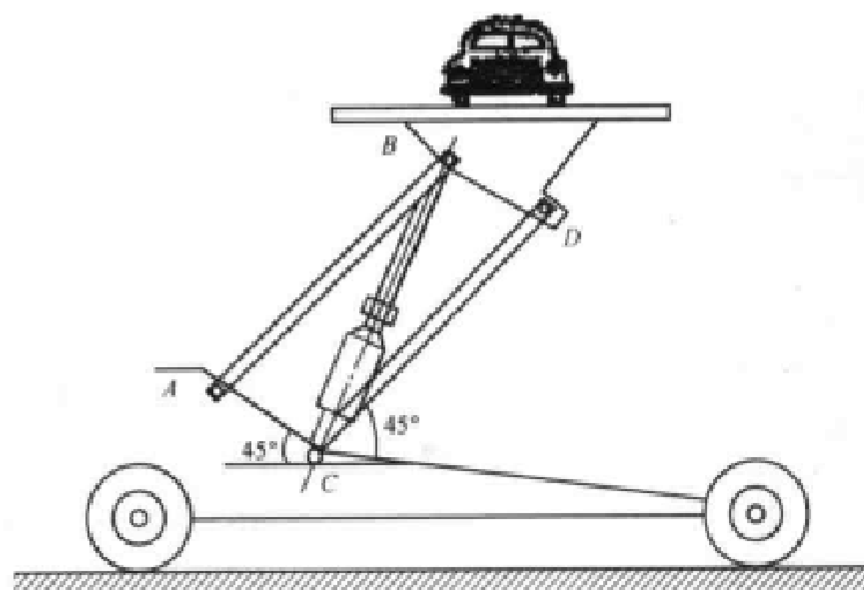


题图 1 - 26

1 - 26　如题图 1 - 26 所示,由四根等长杆构成系统。每根杆长 l,$AE = 2l$。若在 B,C,D 三点处皆作用一相等的铅垂力 P,试求杆系处于平衡时 α 与 β 所满足的关系,略去杆重。

1 - 27　题图 1 - 27 示一移动式起重机,活动部分借两等长连杆 AB、CD 与底部相联。而 $ABCD$ 构成一平行四边形。利用油压力作用在 BC 杆上而使汽车被举起。问当汽车重为

10^4N时，油压力多大方能举起汽车。设此时 CD 与水平的夹角为45°，AC 与水平的夹角亦为45°，$AB = CD = 5$m，$AC = BD = 1.7$m。

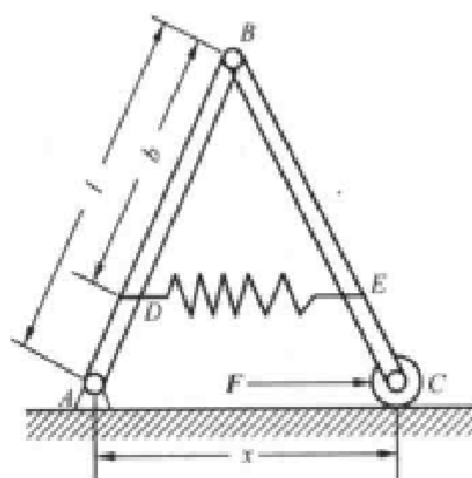


题图 1－27

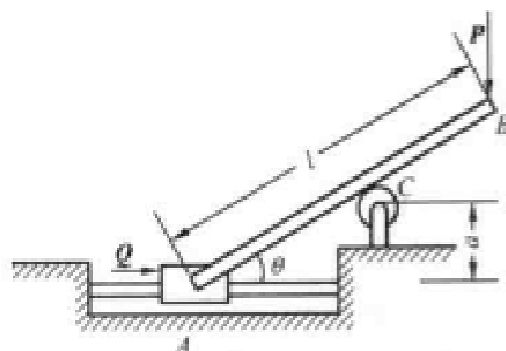
答：22000N

1－28　如题图1－28所示，两等长杆 AB 和 BC 在 B 点用铰链联结，又在杆的 D 和 E 两点连一弹簧，弹簧的刚性系数为 c，当距离 $AC = a$ 时，弹簧内拉力为零。如在 C 点作用一水平力 F，杆系处于平衡，求距离 AC 之值。设 $AB = l$，$BD = b$，杆重不计。

答：$AC = x = a + \frac{F}{c}\left(\frac{l}{b}\right)^2$



题图 1－28



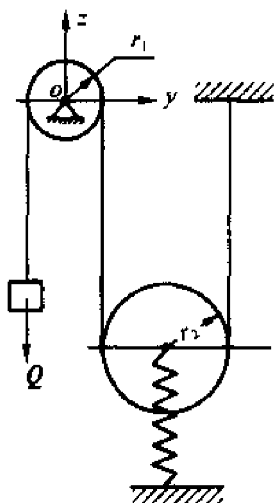
题图 1－29

1－29　题图1－29示杆 AB 的一端 A 与套筒固联，AB 杆搁在 C 处的轮子上，略去摩擦，试导出为了保持平衡所需水平力 Q 的大小的表达式。

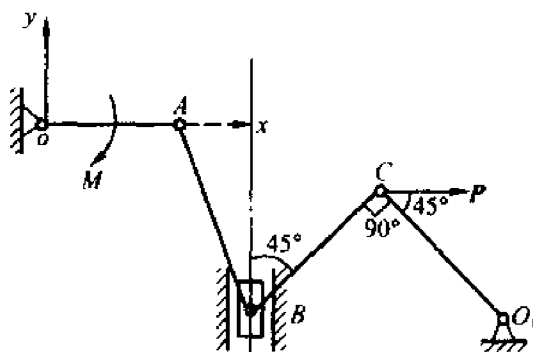
答：$Q = P\frac{l}{a}\cos\theta\sin^2\theta$

1－30　如题图 1－30 所示，已知半径为 r_2 的轮重 $P = 200N$，$Q = 200N$，弹簧刚性系数为 $c = 100N/cm$，试求平衡时弹簧的变形量 h。

答：$h = 2cm$，被拉伸



题图 1－30



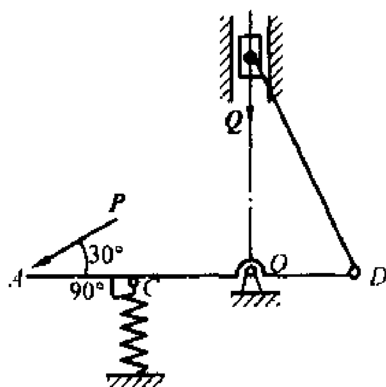
题图 1－31

1－31　已知题图 1－31 所示机构处于平衡。$OA = 40cm$，力偶矩 $M = 200N \cdot m$。试求力 P 的大小。

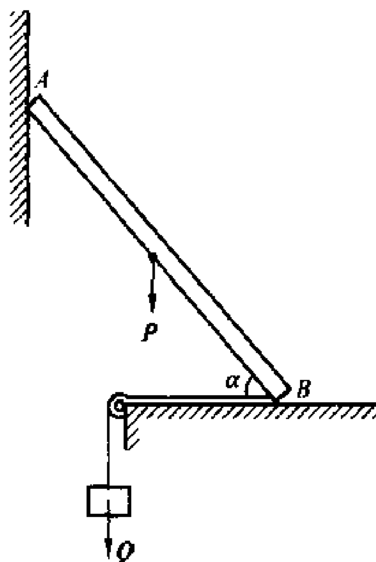
答：$P = 10N$

1－32　如题图 1－32 所示，不计各杆自重及各处摩擦。已知 $AC = OC = OD$，$Q = 3 \times 10^3N$，弹簧刚性系数 $c = 250N/cm$，弹簧变形（被压缩）$h = 3cm$。试求 P 多大时才能平衡？

答：$P = 3750N$



题图 1－32



题图 1－33

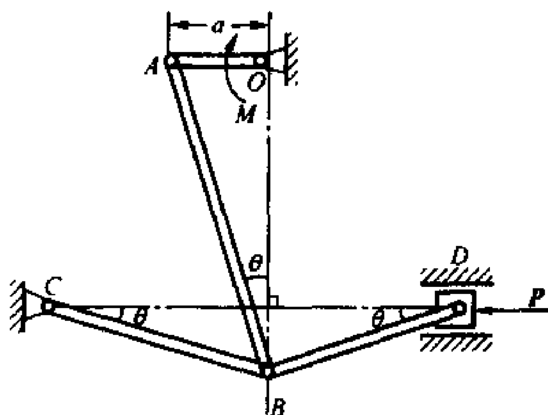
1－33　如题图 1－33 所示，均质杆重 P 靠在不光滑垂直墙上（摩擦系数为 f），其下端

置于光滑桌面上，为使此杆平衡在垂直平面内，在其下端连一绳，跨过一滑轮悬重物 Q。求平衡时的倾斜角 α，并求 A，B 处反力。

答：$\tan\alpha = \frac{P}{2Q} + k, N_A = Q, N_B = P + kQ (k \leqslant f)$

1－34　在题图 1－34 所示机构中，曲柄 OA 上作用一力偶，其矩为 M，滑块 D 上作用一水平力 P。机构尺寸及位形如图示，机构处于平衡状态，不计摩擦，求力偶矩 M 和力 P 之关系。

答：$M = Pa\tan2\theta$



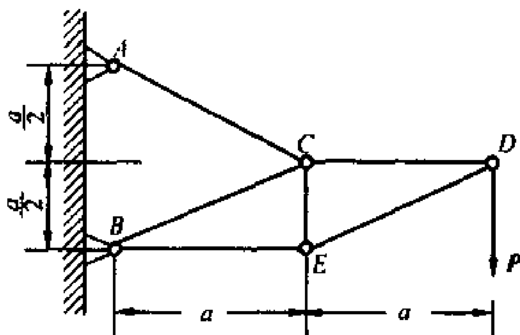
题图 1－34

1－35　求题图 1－35 示平面桁架中 AC 杆与 BC 杆的内力。

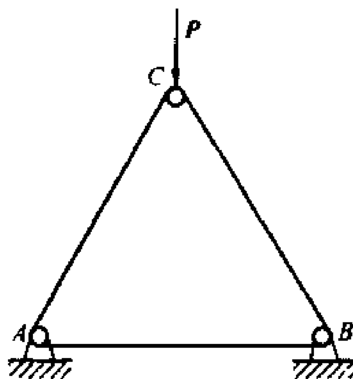
答：$N_{AC} = \sqrt{5}P, N_{BC} = 0$

1－36　已知题图 1－36 所示三角形结构，$AB = AC = BC = a$，在 C 点作用一铅直作用力 P。求杆 AB 的内力。

答：$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}P$



题图 1－35



题图 1－36

1－37　如题图 1－37 所示，设在结构上有载荷作用如下：$P_1 = 6\text{kN}, P_2 = 6\sqrt{2}\text{kN}, P_3 = 9\text{kN}$，试求插入端 C 的反作用力。图中 $a = 1\text{m}$。

答：$M_C = 6\text{kN}\cdot\text{m}; x_c = 3\text{kN}; y_c = 14\text{kN}$

1－38　两相同的均质杆，长度为 l，重为 W，其上各作用如题图 1－38 所示的力偶 M，试求在平衡状态时杆与水平线之夹角 θ_1, θ_2。

答：$\theta_1 = \arccos\frac{2M}{3Wl}$；$\theta_2 = \arccos\frac{2M}{Wl}$

2 动力学普遍方程和拉格朗日方程

在理论力学中我们曾引入了惯性力的概念，介绍过质点系的达朗伯原理，采用静力学中求解平衡问题的方法来处理动力学问题；同时，我们在上一章中建立了虚位移和虚功的概念，应用虚位移原理来解决静力学中的平衡问题。本章则把这两个原理结合起来，推导出质点系动力学普遍方程和拉格朗日方程，这些方程主要用来解决非自由质点系的动力学问题。

2.1 动力学普遍方程

设有一质点系由 N 个质点组成，其中第 i 个质点的质量为 m_i，其上作用的主动力为 $\boldsymbol{F}_i$，约束反力为 $\boldsymbol{R}_i$。如果假想地加上该质点的惯性力 $\boldsymbol{F}_{gi}=-m_i\boldsymbol{a}_i$，则根据达朗伯原理，$\boldsymbol{F}_i$，$\boldsymbol{R}_i$ 与 $\boldsymbol{F}_{gi}$ 应组成形式上的平衡力系。若对质点系的每个质点都做同样的处理，则作用于整个质点系的主动力、约束反力和惯性力应组成平衡力系，即

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i \tag{2-1}$$

这样的式子我们可以列出 N 个，将这 N 个式子相加有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i \tag{2-2}$$

式(2-2)可写成

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \tag{2-3}$$

如果系统具有理想约束，则对于系统的任何一组虚位移($\delta\boldsymbol{r}_1$、$\delta\boldsymbol{r}_2$、…、$\delta\boldsymbol{r}_N$)，作用于系统上的约束力的虚功之和为零，即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1-43}$$

这样便有

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2-4}$$

上式称为动力学普遍方程；写成分析表达式

$$\sum_{i=1}^{N}[(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(Y_i-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(Z_i-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i]=0 \tag{2-5}$$

上述方程表明：在理想约束的条件下，质点系的各个质点在任一瞬时所受的主动力和惯性力在虚位移上所做虚功的和等于零。

动力学普遍方程将达朗伯原理与虚位移原理结合起来，可以求解质点系的动力学问题，特别适合于求解非自由质点系的动力学问题，下面举例说明。

例 2-1 如图 2-1 所示的滑轮系统中，动滑轮上悬挂着质量为 m_1 的重物，绳子绕过定滑轮后悬挂着质量为 m_2 的重物。设滑轮和绳子的重量以及轮轴摩擦都忽略不计，求 m_2

物体下降的加速度。

解　取整个滑轮系统为研究对象，系统具有理想约束。系统所受的主动力为重力 m_1g 和 m_2g，假想加入系统的惯性力为 F_{g1}，F_{g2}，而

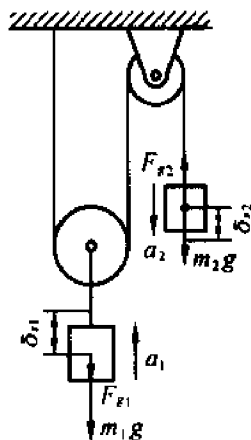


图 2－1

$$F_{g1} = m_1a_1, F_{g2} = m_2a_2$$

给系统以虚位移 δs_1 和 δs_2，由动力学普遍方程，得

$$(m_2g - m_2a_2)\delta s_2 - (m_1g + m_1a_1)\delta s_1 = 0$$

这是一个自由度系统，所以 δs_1 和 δs_2 中只有一个是独立的。由定滑轮和动滑轮的传动关系，有

$$\delta s_1 = \frac{\delta s_2}{2}, a_1 = \frac{a_2}{2}$$

代入前式，有

$$(m_2g - m_2a_2)\delta s_2 - \left(m_1g + m_1\frac{a_2}{2}\right)\frac{\delta s_2}{2} = 0$$

消去 δs_2，得

$$a_2 = \frac{4m_2 - 2m_1}{4m_2 + m_1}g$$

例 2－2　两个半径皆为 r 的均质轮，中心用连杆相连，在倾角为 θ 的斜面上作纯滚动，如图 2－2 所示。设轮子质量均为 m_1，对轮心的转动惯量均为 J，连杆的质量为 m_2，试求连杆运动的加速度。

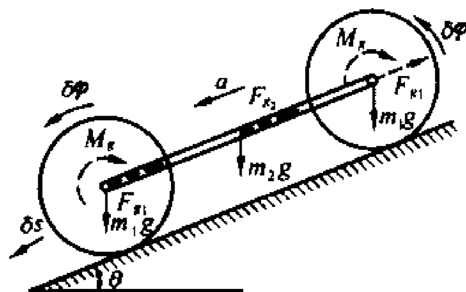


图 2－2

解　研究整个刚体系，作用在系统上的主动力有每个轮子的重力 m_1g 和杆的重力 m_2g。虚加在每个轮子上的惯性力系可以简化为一个通过轮心的惯性力 $F_{g1} = m_1a$ 及一个惯性力偶，其矩 $M_g = J\varepsilon = J\frac{a}{r}$；因连杆作平动，加在连杆上的惯性力系简化为一个力 $F_{g2} = m_2a$，这些力的方向如图所示。

给连杆以平行斜面向下移动的虚位移，则轮子相应有逆时针转动虚位移 $\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}$，根据动力学普遍方程，得

$$-(2F_{g1} + F_{g2})\delta s - 2M_g\delta\varphi + (2m_1 + m_2)g\sin\theta\delta s = 0$$

或

$$-(2m_1 + m_2)a\delta s - 2\frac{J\varepsilon}{r^2}\delta s + (2m_1 + m_2)g\sin\theta\delta s = 0$$

解得

$$a = \frac{(2m_1 + m_2)r^2\sin\theta}{(2m_1 + m_2)r^2 + 2J}g$$

例 2－3　如图 2－3 所示一物体 A 重 P，当下降时借一无重量且不可伸长的绳使一轮

C 沿轨道滚而不滑。绳子跨过定滑轮 D 并绕在半径为 R 的动滑轮上，动滑轮固定地装在半径为 r 的 C 轴上，两者共重 Q，对中心 O 的惯性半径为 ρ。试用动力学普遍方程求重物 A 的加速度。

解 取整个系统为研究对象。因为轮 C 在轨道上纯滚动，故重物 A 的位移 s 与轮 C 的转角 φ 间有关系

$$s=(R-r)\varphi$$

取变分并求导得

$$\delta s=(R-r)\delta\varphi \qquad (1)$$

$$a=(R-r)\varepsilon \qquad (2)$$

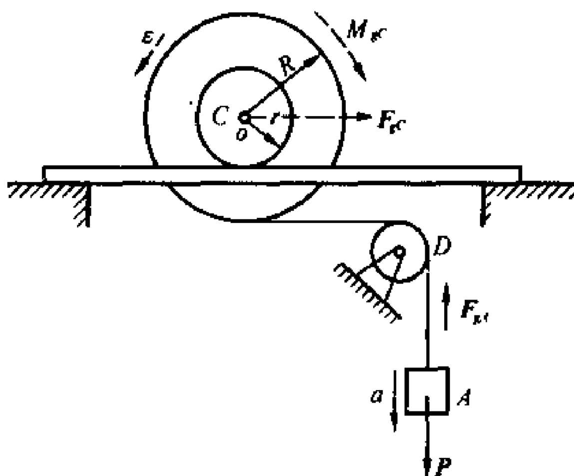


图 2－3

重物 A 的惯性力为 $F_{gA}=\dfrac{P}{g}a$，轮轴 B 和 C 对 O 的惯性力为 $F_{gC}=\dfrac{Qr\varepsilon}{g}$，而惯性力矩为 $M_{gC}=\dfrac{Q\rho^2\varepsilon}{g}$。根据动力学普遍方程，有

$$\left(P-\frac{P}{g}a\right)\delta s-\frac{Q}{g}(\rho^2+r^2)\varepsilon\delta\varphi=0 \qquad (3)$$

将(1) 和(2) 代入(3)，得

$$\left(P-\frac{P}{g}a\right)(R-r)\delta\varphi-\frac{Q}{g}(\rho^2+r^2)\frac{a}{R-r}\delta\varphi=0$$

由此解得

$$a=\frac{P(R-r)^2}{P(R-r)^2+Q(\rho^2+r^2)}g$$

例 2－4 一质量为 M_3 的物块，在重力和弹性力的作用下沿大车斜面自由滑动，弹簧刚度系数为 k，原长为 l_0，大车质量为 M_1，具有四个车轮，每个车轮质量均为 M_2，半径均为 r，对轴的转动惯量均为 J，常力 F 水平作用于大车上，如图 2－4 所示，不计系统中的摩擦，试用动力学普遍方程建立系统的运动微分方程。

解 取整个系统为研究对象，系统受有理想约束，是二自由度系统

描述系统位形的直角坐标参数取为：x_1,x_2,x_3,y_3 广义坐标参数取为：x,q

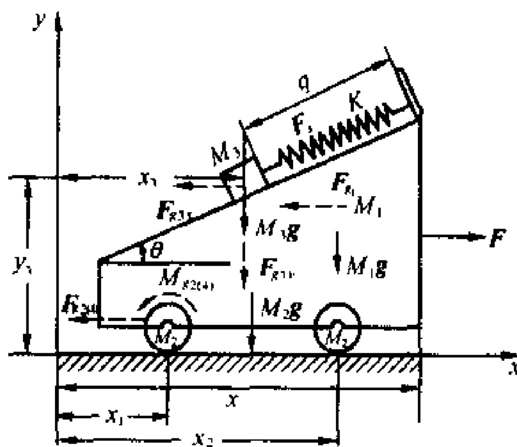


图 2－4

两组参数的关系为

$$x_1=x-c_1,x_2=x-c_2$$

$$x_3=x-q\cos\theta,y_3=c_3-q\sin\theta$$

式中 c_1,c_2,c_3 均为常数。系统中各物体的加速度分别为

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}, \ddot{x}_2 = \ddot{x}, \ddot{x}_3 = \ddot{x} - \ddot{q}\cos\theta, \ddot{y}_3 = -\ddot{q}\sin\theta$$

作用于系统上的主动力有:重力 M_1g, M_2g, M_3g;常力 F;弹性力 $k(q-l_0)$

惯性力有:$F_{g1} = M_1\ddot{x}_1, F_{g2(4)} = M_2\ddot{x}_2, F_{g3x} = M_3\ddot{x}_3, F_{g3y} = M_3\ddot{y}_3$

惯性力矩有:$M_{g2(4)} = J\varepsilon = \dfrac{J}{r}\ddot{x}_2$

现给系统一组虚位移:$\delta x_1, \delta x_2, \delta\varphi_2, \delta x_3, \delta y_3$

则:$\delta x_1 = \delta x, \delta x_2 = \delta x, \delta\varphi_2 = \dfrac{\delta x}{r}, \delta x_3 = \delta x - \delta q\cos\theta, \delta y_3 = -\delta q\sin\theta$

将以上各量代入动力学普遍方程有

$$F\delta x - K(q-l_0)\delta q + M_3g\sin\theta\delta q - M_1\ddot{x}\,\delta x - 4M_2\ddot{x}\,\delta x - 4\frac{J}{r}\ddot{x}\cdot\frac{1}{r}\delta x -$$
$$M_3(\ddot{x} - \ddot{q}\cos\theta)(\delta x - \delta q\cos\theta) - M_3(-\ddot{q}\sin\theta)(-\delta q\sin\theta) = 0$$

上式经化简后,得

$$(F - M_1\ddot{x} - 4M_2\ddot{x} - 4\frac{J}{r^2}\ddot{x} - M_3\ddot{x} + M_3\ddot{q}\cos\theta)\delta x + [M_3g\sin\theta - K(q-l_0) +$$
$$M_3\ddot{x}\cos\theta - M_3\ddot{q}\cos^2\theta - M_3\ddot{q}\sin^2\theta]\delta q = 0$$

由于 $\delta x, \delta q$ 是彼此独立的虚位移,因此,为使上式成立,必有

$$F - M_1\ddot{x} - 4M_2\ddot{x} - 4\frac{J}{r^2}\ddot{x} - M_3\ddot{x} + M_3\ddot{q}\cos\theta = 0$$

$$M_3g\sin\theta - K(q-l_0) + M_3\ddot{x}\cos\theta - M_3\ddot{q} = 0$$

从这个例子中可以看出,直角坐标的虚位移间不是相互独立的,为了对问题求解,必须把不独立的虚位移转换成相互独立的虚位移,最后才能求出结果。

2.2　第二类 Lagrange 方程

上节所讨论的动力学普遍方程中,由于系统存在约束,各质点的虚位移可能不全是独立的,解题时需找出虚位移之间的关系,这在有时是很不方便的。对于完整系统如果采用广义坐标,则由于广义坐标的相互独立性,其广义虚位移也是相互独立的。所以,将动力学的普遍方程用独立的广义坐标表示就成了动力学普遍方程向前发展的必然途径之一。第二类拉格朗日方程就是在这个发展途径下的产物。这一部分内容也可称为拉格朗日力学。

Lagrange 力学的特点是:1) 在广义坐标位形空间中描述任何非自由系统;2) 用能量及变分的方法建立运动微分方程,因而理想约束的约束力能自动消除;3) 方程数目和系统自由度数目相一致,方程形式极为简明。

由于以上原因,Lagrange 力学在分析力学发展史上占有十分重要的地位,是继牛顿力学之后的一个新的里程碑。

2.2.1　第二类 Lagrange 方程的一般形式

本章只限于研究完整系统动力学。我们从动力学普遍方程 $\sum_{i=1}^{N}(F_i - m_i\ddot{r}_i)\cdot\delta r_i = 0$ 出发来推导广义坐标形式的运动微分方程。

设一质点系由 N 个质点组成，系统具有 l 个完整约束，并且都是理想约束，具有 $n = 3N - l$ 个自由度的系统。取系统的广义坐标为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，设系统第 i 个质点的质量为 m_i、矢径为 $\boldsymbol{r}_i$。矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 可表示为广义坐标和时间的函数，即

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{1-15}$$

质点的动力学普遍方程(2-4)可写成

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2-6}$$

将 $\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ 代入上式，并注意交换求和顺序有

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \tag{2-7}$$

根据广义力的定义上式又可写成

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{n} Z_j \delta q_j = 0 \tag{2-8}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} (Q_j - Z_j) \delta q_j = 0 \tag{2-9}$$

对上式进一步简化

$$Z_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{2-10}$$

为了对(2-10)做进一步简化，先证明两个重要的恒等式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{2-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \tag{2-12}$$

1. 关于(2-11)式的证明

在完整约束情况下，$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$，对时间求导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{2-13}$$

由于是完整系统我们知道 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 是彼引独立的，且 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$ 是广义坐标和时间的函数，而不是广义速度的函数，所以将(2-13)式对 $\dot{q}_j$ 求偏导数，得证

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{2-11}$$

2. 关于(2-12)式的证明

将(2-13)式对某一广义坐标 q_j 求偏导数，得

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \tag{2-12}$$

(2-12)式得证。

(2 - 11)(2 - 12)式常称为 Lagrange 经典关系，是推导 Lagrange 方程的关键公式，将(2 - 11)(2 - 12)式代入式(2 - 10)Z_j 表达式有

$$
\begin{aligned}
Z_j = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{2 - 14}
$$

其中 T 为质点系的动能，代入式(2 - 9) 即 $\sum_{j=1}^{n}(Q_j - Z_j)\delta q_j = 0$，便有

$$
\sum_{j=1}^{n}\left(Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\cdot \delta q_j = 0 \tag{2 - 15}
$$

由于 δq_j 彼此相互独立，上式欲成立则必有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{2 - 16}
$$

这就是著名的第二类拉格朗日方程，该方程组中方程式的数目等于质点系的自由度的数目，每个方程都是二阶常微分方程。所以，为了建立第二类拉格朗日方程，只需写出基于运动学分析的动能(动能应表示成广义坐标和广义速度的函数)，及基于主动力虚功的广义力，按统一步骤列出即可。

2.2.2 第二类 Lagrange 方程中动能的结构

关于系统的动能结构我们仅从理论上分析一下

$$
\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3N} m_s \dot{x}_s^2 = \\
& \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3N} m_s \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_s}{\partial t}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_s}{\partial t}\right) = \\
& \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} A_i \dot{q}_j + T_0
\end{aligned} \tag{2 - 17}
$$

其中

$$
A_{ij} = \sum_{s=1}^{3N} m_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i}\frac{\partial x_s}{\partial q_j} \tag{2 - 18}
$$

$$
A_i = \sum_{s=1}^{3N} m_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i}\frac{\partial x_s}{\partial t} \tag{2 - 19}
$$

$$
T_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3N} m_s \left(\frac{\partial x_s}{\partial t}\right)^2 \tag{2 - 20}
$$

系数 A_{ij}，A_i 及 T_0 都是 t 和 q 的函数，而且 $A_{ij} = A_{ji}$，上式说明系统的动能 T 是广义速度的二次函数，为了简明起见常将动能式写为

$$
T = T_2 + T_1 + T_0 \tag{2 - 21}
$$

T_2，T_1，T_0 分别表示广义速度的二次项、一次项及零次项。

另外,对于定常系统由于约束方程中不显含时间 t,所以总可以适当地选取广义坐标而使得直角坐标和广义坐标的变换关系式中同样不含时间 t,这样便有 $\frac{\partial x_i}{\partial t}=0$,因而有 $T_1=0$, $T_0=0$ 于是 $T=T_2$,即定常系统的动能 T 是广义速度 $\dot{q}$ 的二次型,而且 A_{ij} 不显含时间。

2.2.3　保守系统的第二类 Lagrange 方程及 Lagrange 函数

如果作用于质点系上的主动力都是有势力(保守力),则广义力 Q_j 可按前一章中的(1-71)式写成用质点系势能表达的形式,即

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{1-71}$$

将该式代入(2-16)式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2-22}$$

定义函数

$$L=T-V \tag{2-23}$$

称为拉格朗日函数

另外,因为势能不是广义速度 $\dot{q}_j$ 的函数,所以有 $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$,这样(2-19)用 Lagrange 函数可写为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2-24}$$

这就是保守系统的拉格朗日方程。

拉格朗日方程是解决具有完整约束的质点系动力学问题的普遍方程,是分析力学中重要的方程。Lagrange 方程的表达式非常简洁,应用时只需计算系统的动能和广义力;对于保守系统,只需计算系统的动能和势能。因此,Lagrange 方程常用来求解较复杂的非自由质点系的动力学问题。

2.2.4　第二类 Lagrange 方程应用举例

例 2-5　如图 2-5 所示的系统中,A 轮沿水平面纯滚动,质量为 m_1 的物块 C 以细绳跨过定滑轮 B 联于 A 点。A,B 二轮皆为均质圆盘,半径为 R,质量为 m_2。弹簧刚度为 k,质量不计。当弹簧较软,在细绳能始终保持张紧的条件下,求此系统的运动微分方程。

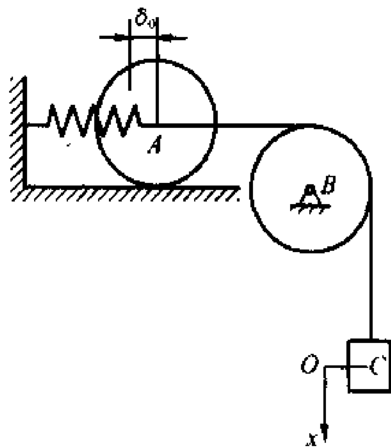


图 2-5

解　此系统具有一个自由度,以物块平衡位置为原点,取 x 为广义坐标如图。以重物平衡位置为重力势能的零点,取弹簧原长处为弹性力势能的原点,则系统在任意位置处的势能为

$$V=\frac{1}{2}k(\delta_0+x)^2-m_1gx$$

其中 δ_0 为平衡位置处弹簧的伸长量。物块速度为 $\dot{x}$ 时,B 轮的角速度为 $\frac{\dot{x}}{R}$,A 轮质心速

$mgl\sin\varphi_2 - Fl\cos\varphi_2$ (7)

(6)(7) 式即为用广义坐标 φ_1, φ_2 所表示的系统的运动微分方程。

该方程组是非线性的,很难求得解析形式的解,所以常用数值方法求解。

例 2－7 如图 2－7 所示的运动系统中,可沿光滑水平面移动的重物 M_1 的质量为 m_1;可在铅垂面内摆动的摆锤 M_2 的质量为 m_2。两个物体用无重杆连接,杆长为 l。求此系统微幅摆动的周期。

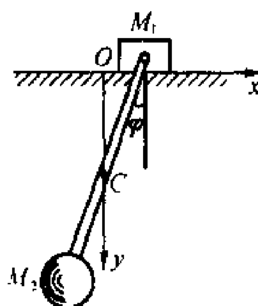


图 2－7

解 取整个系统为研究对象,选取坐标轴如图 2－7 所示。

取直角坐标参数为:x_1, y_1, x_2, y_2

系统受到水平面和刚性杆的约束,所以具有两个自由度,取广义坐标参数为:x_1, φ

坐标变换方程为:$x_1 = x_1$

$$y_1 = 0$$
$$x_2 = x_1 - l\sin\varphi$$
$$y_2 = l\cos\varphi$$

为了求得 M_1、M_2 的运动规律,可用 Lagrange 方程列出系统的运动微分方程,首先计算系统的动能和势能。系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

其中

$$v_1 = \dot{x}_1$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{x}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi - 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi = \dot{x}_1^2 - 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2$$

因此

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2}(l\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

选 M_1 在水平面上而 M_2 在最低处为系统的零势能位置,则系统的势能为

$$V = m_2 gl(1 - \cos\varphi)$$

由此得

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} + m_2 l\sin\varphi\dot{\varphi}^2$$

$$Q_x = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 l\dot{\varphi}\,\dot{x}_1\sin\varphi, \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l\dot{\varphi}^2 - m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l(l\ddot{\varphi} - \cos\varphi \cdot \ddot{x}_1 + \dot{x}_1\sin\varphi \cdot \dot{\varphi})$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -m_2 gl\sin\varphi$$

把以上结果代入拉格朗日方程中,得

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} + m_2 l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = 0$$
$$m_2 l(l\ddot{\varphi} - \cos\varphi \cdot \ddot{x}_1 + \dot{x}_1\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) = -m_2 g l\sin\varphi$$

如果 M_2 摆动很小,则可近似地认为 $\sin\varphi \approx \varphi$,$\cos\varphi \approx 1$ 且可忽略含 $\dot{\varphi}^2$ 或 $\dot{x}_1\dot{\varphi}$ 的高阶小量,上式可改写为

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l\ddot{\varphi} = 0$$
$$l\ddot{\varphi} - \ddot{x}_1 = -g\varphi$$

从上式中的第二式得

$$\ddot{x}_1 = l\ddot{\varphi} + g\varphi$$

将它代入第一式并经整理后得

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{g}{l}\varphi = 0$$

这是自由振动的微分方程,其解为

$$\varphi = A\sin(\omega_n t + \theta)$$

圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{g}{l}}$$

例 2 - 8 一质点质量为 m,挂在一条线上,线的另一端绕在半径为 r 的固定圆柱体上。设在平衡位置时线长为 l,且不计线的质量如图 2 - 8 所示。试列写所组成摆的运动微分方程。

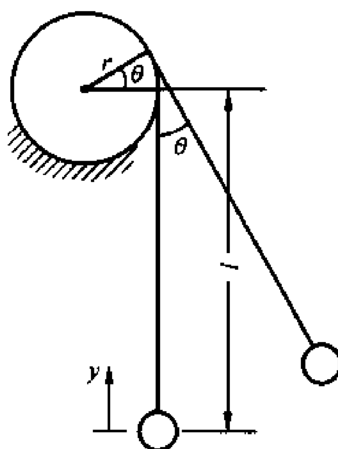


图 2 - 8

解 问题为单自由度系统,取 θ 为广义坐标。质点的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(l+r\theta)^2\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

再计算广义力,因

$$y = l + r\sin\theta - (l+r\theta)\cos\theta$$
$$\delta y = r\cos\theta\delta\theta - r\delta\theta\cos\theta + (l+r\theta)\sin\theta\delta\theta = (l+r\theta)\sin\theta\delta\theta$$
$$\delta A_\theta = -mg(l+r\theta)\sin\theta\delta\theta$$

故

$$Q_\theta = \frac{\delta A_\theta}{\delta\theta} = -mg(l+r\theta)\sin\theta \qquad (2)$$

由(1)知

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = m(l+r\theta)^2\dot{\theta}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right] = m(l+r\theta)^2\ddot{\theta} + 2ml(l+r\theta)r\dot{\theta}^2$$
$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = m\dot{\theta}^2(r\theta+l)r \qquad (3)$$

代入拉格朗日方程,得

$$m(l+r\theta)^2\ddot{\theta} + 2m(l+r\theta)r\dot{\theta}^2 - m(l+r\theta)r\dot{\theta}^2 = -mg(l+r\theta)\sin\theta$$

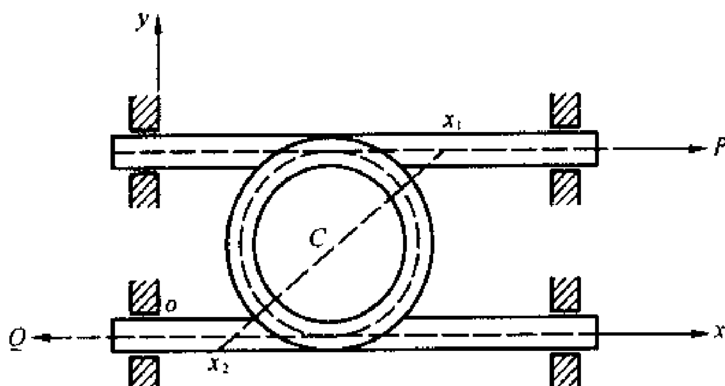


图 2 - 10

$$\frac{1}{2}(2m_1+m_2)(\dot{x}_c^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

主动力 P 和 Q 的虚功为

$$\delta A = P\delta x_1 - Q\delta x_2 = P(\delta x_c + r\delta\varphi) - Q(\delta x_c - r\delta\varphi) = (P-Q)\delta x_c + (P+Q)r\delta\varphi$$

则对应于坐标 x_c 和 φ 的广义力 Q_c 和 Q_φ 为

$$Q_c = P - Q, Q_\varphi = (P+Q)r$$

代入拉格朗日方程,得系统的动力学方程为

$$(2m_1+m_2)\ddot{x}_c = P - Q$$

$$(2m_1+m_2)r^2\ddot{\varphi} = (P+Q)r$$

由此求得轮心加速度和角速度分别为

$$\ddot{x}_c = \frac{P-Q}{2m_1+m_2}, \ddot{\varphi} = \frac{P+Q}{(2m_1+m_2)r}$$

由上述计算结果可以看出,当 $P = Q$ 时,则齿轮质心加速度为零。

例 2 - 11　在水平面内运动的行星齿轮,如图 2 - 11 所示,均质系杆 OA 质量为 M,它可绕端点 O 转动,另一端装有一质量为 m,半径为 r 的均质小齿轮,小齿轮又可沿半径为 R 的固定大齿轮滚动。当系杆受力偶矩为 L 的力偶作用时,求系杆的运动方程。

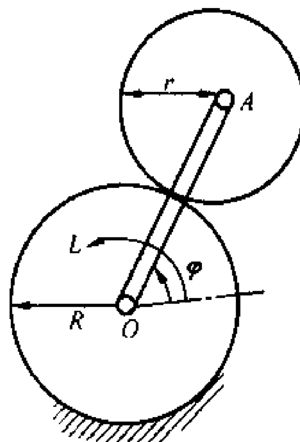


图 2 - 11

解　机构具有一个自由度,选系杆的转角 φ 为广义坐标。假设系杆 OA 对 O 轴转动惯量为 J_O,小齿轮对其质心 A 的转动惯量为 J_A,小齿轮的绝对角速度为 $\dot{\theta}_A$,则点 A 的速度为

$$v_A = (R+r)\dot{\varphi}$$

小齿轮的绝对角速度

$$\dot{\theta}_A = \frac{v_A}{r} = \frac{R+r}{r}\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_1\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}J_2\left(\frac{r_1\dot{x}}{r_2R}\right)^2$$

广义力为

$$Q = \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{-P\delta x + M\frac{r_1\delta x}{r_2R}}{\delta x} = \frac{r_1M}{r_2R} - P$$

代入拉格朗日方程,得

$$\left(\frac{P}{g} + \frac{J_1}{R^2} + \frac{r_1^2J_2}{r_2^2R^2}\right)\ddot{x} = \frac{r_1M}{r_2R} - P$$

故得重物的平均加速度为

$$\ddot{x} = \frac{\left(\frac{r_1M}{r_2R} - P\right)R}{\frac{P}{g}R^2 + J_1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}J_2}$$

由所得结果可知,$\ddot{x}$ 为一常量,即起动时重物以匀加速上升。

例 2－13　半径为 r,质量为 M 圆环 O,在直线轨道上只滚不滑。在圆环内有一长为 l,质量为 m 的匀质杆 AB,在其内无摩擦地滑动,如图 2－13 所示。已知 $l=\sqrt{2}r$,写出系统的运动微分方程。

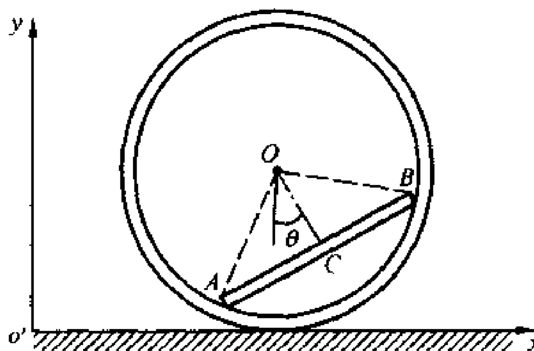


图 2－13

解　系统具有两个自由度,取圆环中心 O 的坐标 x_0 以及圆心 O 和杆中心 C 连线与铅垂线的夹角 θ 为广义坐标,由于圆环作纯滚动,故其转动角速度 $\omega = \frac{\dot{x}_o}{r}$,$OC = \frac{r}{\sqrt{2}}$,系统的总动能为

$$T = \frac{1}{2}\left[M\dot{x}_o^2 + Mr^2\left(\frac{\dot{x}_o}{r}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[m\left(\dot{x}_o^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}r\dot{x}_o\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{12}m(\sqrt{2}r)^2\dot{\theta}^2\right] =$$

$$(M + \frac{m}{2})\dot{x}_o^2 + \frac{1}{3}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}mr\dot{x}_o\dot{\theta}\cos\theta$$

取过 O 点的水平面为零势能面,系统的总势能为

$$V = -\frac{\sqrt{2}}{2}rmg\cos\theta$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \left(M + \frac{m}{2}\right)\dot{x}_o^2 + \frac{1}{3}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}mr\dot{x}_o\dot{\theta}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}rmg\cos\theta$$

代入拉格朗日方程,则系统的运动微分方程为

$$(2M + m)\dot{x}_o + \frac{\sqrt{2}}{2}mr(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = 0$$

$$4r\ddot{\theta} + 3\sqrt{2}\ddot{x}_o\cos\theta + 3\sqrt{2}g\sin\theta = 0$$

如果只考虑微振动,即 θ 为微量,并略去其二次项,则上两式简化为

$$(2M+m)\ddot{x}_o+\frac{\sqrt{2}}{2}mr\ddot{\theta}=0$$

$$4r\ddot{\theta}+3\sqrt{2}\ddot{x}_o+3\sqrt{2}g\theta=0$$

消去 $\ddot{x}_o$，得

$$\frac{8M+m}{2M+m}r\ddot{\theta}+3\sqrt{2}g\theta=0$$

系统的微振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}(8M+m)r}{6(2M+m)g}}$$

例 2-14　质量为 m_1，质心在 O_1 的物块放在光滑的水平面上，其一端用弹性系数为 k 的水平放置的弹簧与墙相连；另一端作用有一个水平力 $F=F_0\sin\omega t$，在物块上相嵌一以 O_1 为圆心，半径为 r 的圆形轨道，一质量为 m_2，大小不计的小球在其内运动，如图 2-14 所示。求物块与小球的运动微分方程。

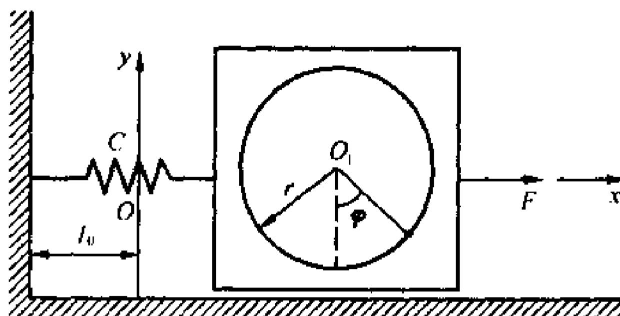


图 2-14

解　系统具有两个自由度，选物块质心 O_1 坐标 x 及小球与 O_1 连线和铅垂线夹角 φ 为广义坐标，如图所示。l_0 为弹簧原长。

系统的主动力除了有重力 m_1g、m_2g 和弹性力 kx 等有势力外，还有非有势力 F。

物块速度　　$v_1=\dot{x}$

小球速度为　　$v_2=[\dot{x}^2+(r\dot{\varphi})^2+2\dot{x}\,r\dot{\varphi}\cos\varphi]^{\frac{1}{2}}$

系统的总动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2[\dot{x}^2+(r\dot{\varphi})^2+2\dot{x}\,r\dot{\varphi}\cos\varphi]=$$
$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(r^2\dot{\varphi}^2+2r\dot{x}\,\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

取弹簧原长处为弹性势能零位；$\varphi=0$ 时，小球所在位置为重力势能零位，则系统的总势能为

$$V=\frac{k}{2}x^2+m_2gr(1-\cos\varphi)$$

分别给系统以虚位移 δx 和 $\delta\varphi$，则力 F 在虚位移上的虚功为

$$\delta A_x=F_0\sin\omega t\cdot\delta x$$

$$\delta A_\varphi=0$$

故非有势力和广义力为

$$Q'_x=F_0\sin\omega t$$

$$Q'_\varphi=0$$

将上述分别代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=Q'_x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=Q'_\varphi$$

得

$$(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2r(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)+kx=F_0\sin\omega t$$

$$r\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0$$

从上面的例子中可以看出，为了正确地列出一个系统的 Lagrange 方程，应注意以下几个基本步骤：

(1) 分析系统的约束条件及主动力的性质，对系统的类型(完整或非完整系统、定常或非定常系统、保守或非保守系统) 作出正确判断。

(2) 确定系统的自由度并选取广义坐标。

(3) 用选定的广义坐标对系统作运动学分析，并写出用广义坐标表示的动能函数及势能函数，求出对应于广义坐标的广义力。

2.3 第二类 Lagrange 方程的首次积分

从上节的例题中可以看到，对于完整系统，应用拉格朗日方程，可以比较容易地建立运动微分方程。但最后结果将导致求解 n 个以时间 t 为独立变量的二阶常微分方程组。一般情况下，对微分方程组直接进行求解，是一件相当困难的事。通常情况下，我们可以从具体问题出发来寻求微分方程的第一积分也叫首次积分。

一般来说，寻找运动微分方程的首次积分，都有一定的规律性，有的第一积分可以因系统本身运动所具有的力学特性而被找出来。例如对于保守系统存在着能量守恒的第一积分；也有的第一积分可以从运动微分方程所特有的几何性质而被找出来，例如循环积分。下面就两种首次积分我们分别进行讨论。

2.3.1 能量积分

对于完整保守系统，如果系统的拉格朗日函数 L 不显含时间 t，则拉格朗日方程有能量积分，即

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=h \quad (h\ \text{是积分常数}) \tag{2-25}$$

证明

$$L=L(q,\dot{q}) \tag{2-26}$$

将拉格朗日函数对时间 t 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) \tag{2-27}$$

由保守系统拉格朗日方程有

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{2-28}$$

将式(2-28)代入式(2-27),则有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j \tag{2-29}$$

移项有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)=0 \tag{2-30}$$

故有

$$E=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=h \tag{2-31}$$

E 具有能量的量纲，因而也将其称为广义能量。该式表明，当系统的拉格朗日函数 L 不显含时间 t 时，其广义能量 E 在运动过程中不变，即系统的广义能量守恒，该式称为广义能量积分。

下面我们讨论一下广义能量积分的物理意义。

1.对于定常保守系统

首先我们来证明一个定理：Euler 齐次函数定理

即

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=2T_2 \tag{2-32}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=T_1 \tag{2-33}$$

由系统的动能结构有

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3N}m_s\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) \tag{2-34}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{s=1}^{3N}m_s\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\frac{\partial x_s}{\partial q_j} \tag{2-35}$$

这样便有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=\sum_{s=1}^{3N}m_s\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)=2T_2 \tag{2-32}$$

同理可证

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=T_1 \tag{2-33}$$

所以对于定常保守系统来说有 $L=T-V=T_2-V$ 代入(2-31)式有

$$E=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=2T_2-T_2+V=h \tag{2-36}$$

即

$$T_2+V=h \tag{2-37}$$

这表明在保守系统情况下，广义能量积分就是系统的机械能守恒积分。也就是说，对于保守系统，广义能量就是系统的总机械能(动能加势能)，它在运动中是不变的。通常又把这种广义能量积分称为能量积分。

2.对于非定常保守系统

$$T=T_2+T_1+T_0 \tag{2-38}$$

$$L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V \qquad (2-39)$$

在此情况下

$$E = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + 0 - L = h \qquad (2-40)$$

根据 Euler 齐次函数定理有

$$2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 + V = h \qquad (2-41)$$

即

$$T_2 + (V - T_0) = h \qquad (2-42)$$

上式我们称之为广义能量积分，也叫雅可比积分。该积分具有能量的量纲，但并不是系统的总能量，所以我们称之为广义能量积分。

(2-42)与(2-37)比较可知只差一项 T_0，这一项是由于系统的非定常性所引起的，或者说是与系统的非定常性有关的一部分动能转化而来的势能。

例 2-15 细管弯成半径为 r 的圆环，以角速度 ω 绕铅垂直径转动，质量为 m 的质点可以在细管内无摩擦地滑动，如图 2-15 所示。试求系统的广义能量积分。

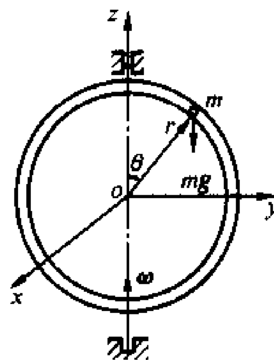


图 2-15

解 取圆管和质点为研究对象，该系统为完整系统，系统的自由度数目为二，取 θ 为广义坐标(另一个广义坐标 φ，实际上为循环坐标)，如图 2-15 所示。系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\omega^2\sin^2\theta)$$

上式中 $T_2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2, T_1 = 0, T_0 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta$

作用在系统上的主动力为保守力，势能函数为

$$V = mgr\cos\theta$$

因此，系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta - mgr\cos\theta$$

从上式可见，在拉格朗日函数 L 中不显含时间 t，因此，拉格朗日方程的雅可比积分为

$$T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta + mgr\cos\theta = E$$

上式中，若令

$$T' = T_2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$V' = V - T_0 = mgr\cos\theta - \frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta$$

式中 T' 相当于质点相对于圆管动参考系的动能；V' 相当于对于动参考系的相对势能，它包括实际的重力势能和由于质点随同圆管转动而产生的离心力势能。这就是说，对于转动参考系来说，相对此动参考系的机械能是守恒的，即

$$T' + V' = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta = E$$

其中 T' 是广义速度 $\dot{\theta}$ 的二次齐次式，V' 只是广义坐标的函数，并且都不显含时间 t。

例 2 - 16　质量为 m，其大小不计的小球 A，用一长为 l，质量不计，又不可伸长的绳悬挂于固定点 B，如图 2 - 16 所示。求小球运动微分方程的首次积分。

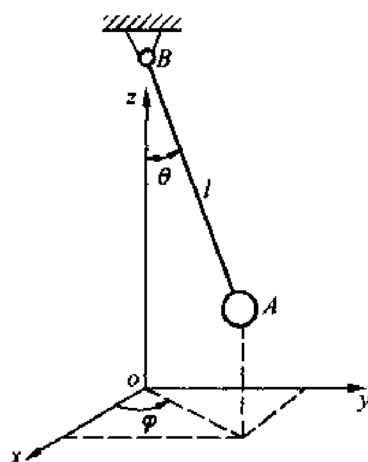


图 2 - 16

解　系统具有两个自由度，选 θ 和 φ 为广义坐标，则小球的动能为

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

选取重力势能零位在 B 点，则势能为

$$V = -mgl\cos\theta$$

则拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$$

由此可见，在 L 中不显含广义坐标 φ 和时间 t，由此可得两个首次积分。

循环积分为

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C_1$$

即

$$ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = C_1 \tag{a}$$

能量积分为

$$T_2 + V = C_2$$

即

$$\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - mgl\cos\theta = C_2 \tag{b}$$

其中 C_1，C_2 为积分常数，可由运动的初始条件来确定。

有了这两个初积分，就不必列微分方程而求得广义坐标 θ，φ 与时间 t 的关系，而给出球面摆的运动规律。

由式(a)解出 $\dot{\varphi}$ 代入式(b)，积分求出 θ，然后再代入式(a)积分求得 φ。

例 2 - 17　半径为 R 的光滑大圆环以匀角速度 ω 绕环上某点 o 在水平面内转动，有一质量为 m 的小环在大环上滑动，如图 2 - 17 所示。求水环运动微分方程的首次积分。

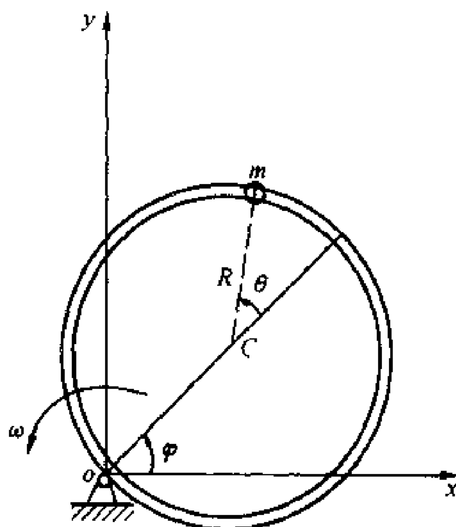


图 2 - 17

解　小环为所考察的系统，只有一个自由度，取 θ 为广义坐标，其中 $\varphi = \omega t$，则小环的坐标为

$$x = R\cos\varphi + R\cos(\varphi + \theta) = R\cos\omega t + R\cos(\omega t + \theta)$$

$$y = R\sin\varphi + R\sin(\varphi + \theta) = R\sin\omega t + R\sin(\omega t + \theta)$$

其中 c_j 为积分常数,该式称为循环积分。所以对于保守系统如果存在循环坐标则有循环积分。

系统有多少个循环坐标,便有多少个循环积分,这里我们引入记号

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = c_j \tag{2-46}$$

并称 p_j 为第 j 个广义动量,于是可以这样说,对于保守系统如果存在循环坐标 q_j,则对应于该广义坐标的广义动量 p_j 不变,也称广义动量守恒。它相当于理论力学中讲过的系统的动量守恒或系统的动量矩守恒。

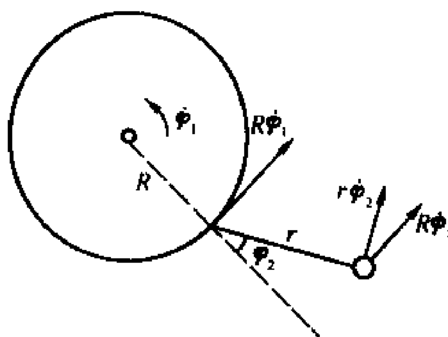


图 2-18

例 2-18 在水平面内的均质圆盘要绕过形心的竖轴转动,在圆盘边缘用铰链连结一个摆如图 2-18 所示。设圆盘的转动惯量为 I,半径为 R,摆长为 r,摆锤质量为 m,试列出此系统的 Lagrange 方程,并通过首次积分求解。

解 取圆盘之转角 φ_1 及摆杆相对圆盘之摆角 φ_2 为系统的广义坐标,由于没有广义力,系统的 Lagrange 函数 L 即系统的动能为

$$L = T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m[(R\dot{\varphi}_1 + r\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2)^2 + (r\dot{\varphi}_2\sin\varphi)^2] =$$

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}[R^2\dot{\varphi}_1^2 + 2Rr\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 + r^2\dot{\varphi}_2^2] \tag{a}$$

系统的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\dot{\varphi}_1 + mR^2\dot{\varphi}_1 + mRr\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2) = 0$$

$$mr^2\ddot{\varphi}_2 + mRr\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_2 - mRr\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 = 0 \tag{b}$$

由于是保守系统,存在能量积分

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m[R^2\dot{\varphi}_1^2 + 2Rr\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 + r^2\dot{\varphi}_2^2] = h \tag{c}$$

由于 L 不显含 φ_1,存在循环积分

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = C_1$$

或

$$I\dot{\varphi}_1 + mR^2\dot{\varphi}_1 + mRr\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 = C_1 \tag{d}$$

能量积分(c)及循环积分(d)都是问题的首次积分,由(d)式解出 $\dot{\varphi}_1$ 代入(c)式,积分后可得 $\varphi_2(t)$,再回到(d)式,可解得 $\varphi_1(t)$。

值得注意的是,在这个问题中虽然 φ_1 是循环坐标,但 $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}$ 并不具有对 O 轴的总动量矩那样的含义。

2.4 第二类 Lagrange 方程的降阶(罗司方程)

对于完整保守系统如果系统存在循环坐标则有循环积分，也就是存在系统的首次积分，这样系统所列出的方程为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = c_j \quad (j = 1,2,\cdots,k) \tag{2-45}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = k+1,k+2,\cdots,n) \tag{2-47}$$

仍然为 n 个方程。罗司于 1876 年利用循环积分对拉格朗日方程进行了降阶，他用循环积分使拉格朗日方程降为仅保留非循环坐标的拉格朗日方程，使得拉格朗日方程的形式更为简明，该方程即为罗司方程。下面我们来推导该方程。

设有一个 n 自由度的完整保守系统，同时设有 k 个循环坐标 $q_i(i = 1,2,\cdots,k)$，于是 Lagrange 函数可写成如下形式

$$L = L(q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t) \tag{2-48}$$

故有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c_i \quad (i = 1,2,\cdots,k) \tag{2-49}$$

由

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} A_i\dot{q}_i + T_0 - V \tag{2-50}$$

其中

$$A_{ij} = \sum_{s=1}^{3N} m_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i}\frac{\partial x_s}{\partial q_j} \tag{2-18}$$

$$A_i = \sum_{s=1}^{3N} m_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i}\frac{\partial x_s}{\partial t} \tag{2-19}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3N} m_s\left(\frac{\partial x_s}{\partial t}\right)^2 \tag{2-20}$$

$$x_s = x_s(q_1,q_2,\cdots,q_n,t) \quad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{1-14}$$

有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_j + A_i = c_i \tag{2-49}$$

很显然它是广义速度的线性式，并且不显含循环坐标 $q_i(i = 1,2,\cdots,k)$，这样只要该式的雅可比行列式

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right| \neq 0 \quad (i,j = 1,2,\cdots,k) \tag{2-51}$$

即可从该代数方程组中解出和循环坐标 q_i 相对应的 k 个广义速度 $\dot{q}_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 即

$$\dot{q}_i = f_i(q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_n,\dot{q}_{k+1},\dot{q}_{k+2},\cdots,\dot{q}_n,c_1,c_2,\cdots,c_k,t) \quad (i = 1,2,\cdots,k) \tag{2-52}$$

现定义一个函数即罗司函数

$$R = L - \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2-53}$$

将式(2－52)代入式(2－53)消去 $\dot{q}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 便有如下形式的 Routh 函数

$$R = R(q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \cdots, \dot{q}_n, c_1, c_2, \cdots, c_k, t) \tag{2-54}$$

首先对(2－54)式求变分有

$$\delta R = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial c_i}\delta c_i \tag{2-55}$$

再对(2－53)式求变分并注意到(2－49)式有

$$\begin{aligned}\delta R = {} & \delta L - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \\ & \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \\ & \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\partial q_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\end{aligned} \tag{2-56}$$

由

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{2-57}$$

有

$$\sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \delta c_i \tag{2-58}$$

将式(2－58)代入式(2－56)有

$$\delta R = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\partial q_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \delta c_i \tag{2-59}$$

比较(2－55)式和(2－59)式则应有对应项相等，有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial R}{\partial q_i} \quad (i = k+1, k+2, \cdots, n) \tag{2-60}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = k+1, k+2, \cdots, n) \tag{2-61}$$

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial R}{\partial c_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{2-62}$$

将上式代入 Lagrange 方程，得出 $(n-k)$ 个罗司方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = k+1, k+2, \cdots, n) \tag{2-63}$$

上述方程与 Lagrange 方程具有相同的形式，只不过是用罗司函数取代了 Lagrange 函数，但方程的个数却减少了 k 个。

综上所述，一个具有 n 个自由度的完整保守系统，若系统中有 k 个循环坐标，此时，该系统的 n 个 Lagrange 方程可降阶为 $(n-k)$ 个罗司方程。具体做法是首先由 k 个循环积分 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = c_j$ 解出 $\dot{q}_i(i=1,2,\cdots,k)$，然后代入罗司函数 $R = L - \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$，再将罗司函数 R 代入罗司方程中，便得到关于 $(n-k)$ 个非循环坐标的运动微分方程。

关于循环坐标，则可通过求积式而得

$$q_i = -\int \frac{\partial R}{\partial c_i} \mathrm{d}t \quad (i = 1,2,\cdots,k) \tag{2-64}$$

例2-19 设单位质量的质点 M,受引力的作用,该力永远通过固定中心 O,如图2-19所示,势能函数为 $V = -\frac{\mu}{r}$(μ 为引力常数)。试用罗司方法对系统的 Lagrange 方程降阶。

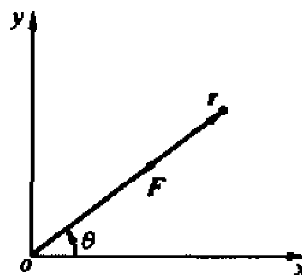


图2-19

解 该系统为完整保守系统,自由度数目为两个,我们取 r,θ 为广义坐标,系统的动能函数为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\mu}{r}$$

从 Lagrange 函数中可知,θ 为循环坐标,因而存在有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = c \quad 即 \quad r\dot{\theta} = c$$

由上式解出

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$$

现组成罗司函数有

$$R = L - \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\mu}{r} - \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{C^2}{r^4}\right) + \frac{\mu}{r} - \frac{C^2}{r^2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 - \frac{c^2}{r^2}\right) + \frac{\mu}{r}$$

在罗司函数中,利用了循环积分消除了循环坐标 θ 的导数 $\dot{\theta}$,把两个自由度系统简化为非循环坐标 r 的单自由度系统。将罗司函数代入罗司方程中,便可以得到关于非循环坐标 r 的运动微分方程,即

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} = 0 \tag{a}$$

关于循环坐标 θ 则可通过求积得

$$\theta = \int \frac{c}{r^2}\mathrm{d}t \tag{b}$$

所以由(a) 式求得了 $r(t)$ 后代入(b) 式即可求得 $\theta(t)$。

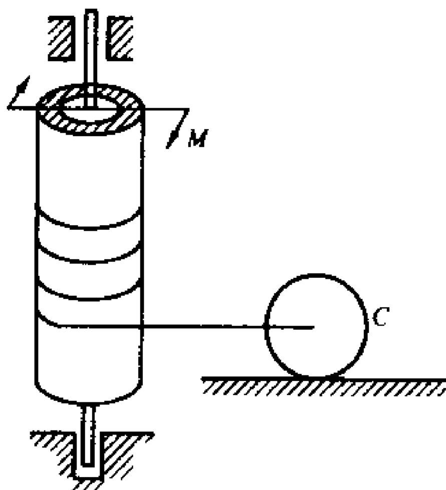
习　　题

2-1　如题图 2-1所示,重量为 P 的竖立鼓轮可视为一空心圆柱,其外半径为 R,内半径为 r。鼓轮上缠以无重绳索,拖动一均质圆柱滚子沿水平面无滑动滚动。滚子重量为 Q。如在鼓轮上作用一矩为 M 的力偶,试求其角加速度。

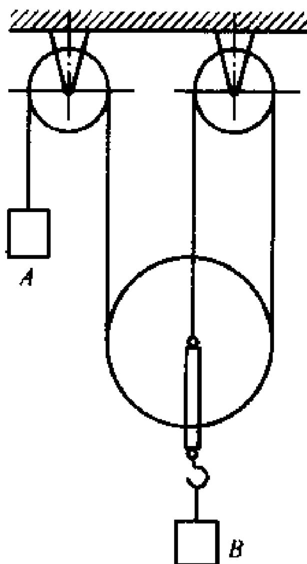
答：$\varepsilon = \dfrac{2Mg}{P(R^2 + r^2) + 3QR^2}$

2－2 如题图2－2所示，不计滑轮及绳索的质量，A 的重量为 P，B 的重量为 Q。试求重物 A 下降时的加速度。此时重物 B 上升。

答：$a = 3g \cdot \dfrac{3P - Q}{9P + Q}$



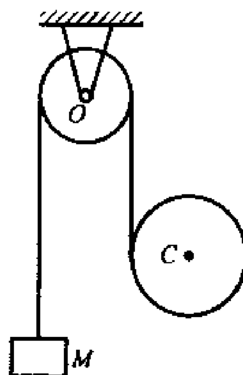
题图 2－1



题图 2－2

2－3 如题图2－3所示，重量为 P 的实心圆柱，在其中间缠以绳子，此绳的另一端跨过滑轮 O 同重量为 Q 的重物 M 相连接。设重物 M 上升，不计滑轮和绳的质量，试求重物 M 及圆柱轴 C 的加速度。

答：$a_M = \dfrac{P - 3Q}{P + 3Q}g$；$a_C = \dfrac{P + Q}{P + 3Q}g$；



题图 2－3

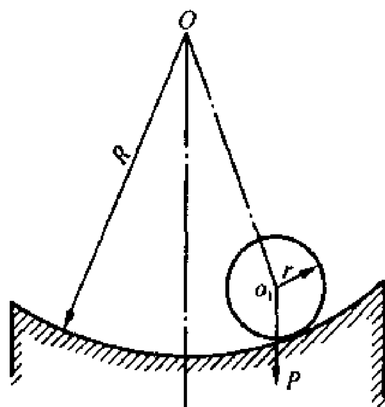
2－4 如题图2－4所示，一重量为 P_1 的单摆，其支点固定在一圆轮的中心 O。圆轮重 P_2，放在水平面上，圆轮与平面间有足够的摩擦力阻止滑动。设圆轮可视为均质圆盘，求在图示位置无初速地开始运动时，轮心 O 的加速度。

答：$a = \dfrac{P_1 \sin 2\theta}{3P_2 + 2P_1 \sin^2\theta}g$

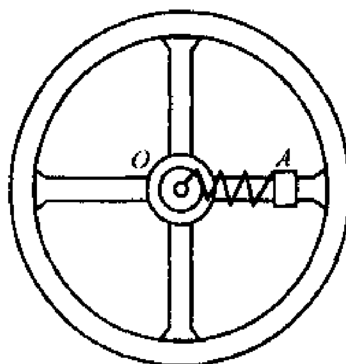
2－5 如题图2－5所示，一重为 P_1 的斜面置于光滑水平面上，在斜面上，放一半径为 r，重为 P_2 的均质圆柱。圆柱只能在斜面上滚动，不计滚动阻力，求圆柱中心相对于斜面的加速度，以及斜面运动的加速度。

答：$a_r = \dfrac{2(P_1 + P_2)\sin\alpha}{3(P_1 + P_2) - 2P_2\cos^2\alpha}g$

$a = \dfrac{P_2 \sin 2\alpha}{3(P_1 + P_2) - 2P_2\cos^2\alpha}g$



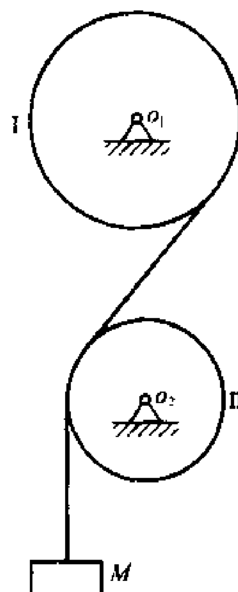
题图 2－9



题图 2－10

2－11 如题图 2－11 所示，两个滑轮 Ⅰ 和 Ⅱ 的重量分别为 Q 和 Q_2，而重物 M 的重量则为 P。重物 M 下降时解开轮 Ⅰ 上的绳并且无滑动地带动两轮旋转。设两轮为实心均质圆柱，求重物 M 的加速度。

答：$a = \dfrac{2P}{2P + Q + Q_2}g$



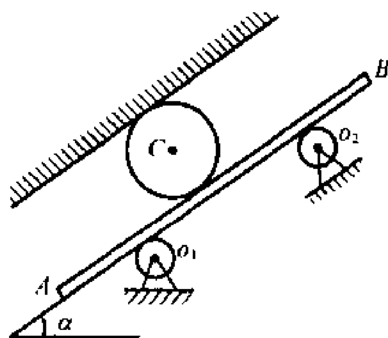
题图 2－11

2－12 如题图 2－12 所示，重量为 P_1 的杆 AB 向下平动，使两个各自重量为 P_2 的相同辊轴分别绕水平轴 O_1 及 O_2 转动，同时迫使夹在杆和固定平面之间的重量为 P_3 的圆盘滚而不滑。设杆 AB 及固定平面与水平面的倾角为 α，试求圆盘重心的加速度。

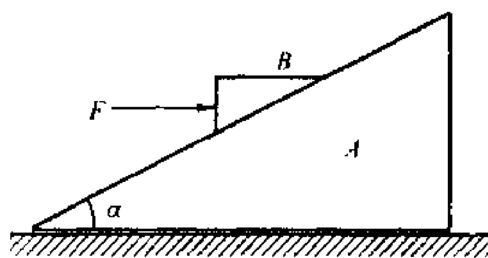
答：$a_0 = 2g \cdot \dfrac{2P_1 + P_3}{8P_1 + 8P_2 + 3P_3}\sin\alpha$

2－13 如题图 2－13 所示，楔块 A 的重量等于 P_1，沿水平面滑动，而楔块 B 则沿 A 的斜面滑动。B 的重量等于 P_2，角 α 为已知。如在楔块 B 上有水平力 F 作用，试求楔块 A 的加速度。摩擦略去不计。

答：$a = \dfrac{F\sin\alpha + P_2\cos\alpha}{P_1 + P_2\sin^2\alpha}g\sin\alpha$

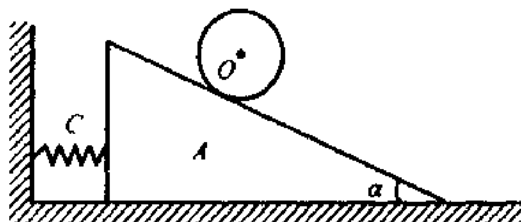


题图 2－12



题图 2－13

2－14　如题图 2－14 所示，放在光滑水平面上的楔块 A 的重量等于 P_1。均质实心圆柱的重量为 P_2。弹簧的刚性系数为 c。角 α 为已知。如在初瞬时系统处于静止，弹簧无变形，试求楔块的运动方程。设圆柱与楔块之间无滑动。

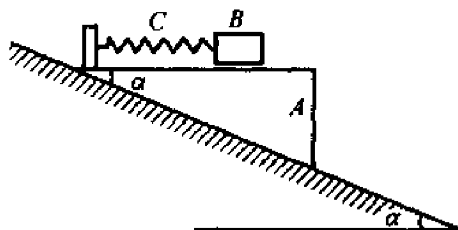


题图 2－14

答：$x = -\dfrac{P_2}{3c}(1-\cos kt)\sin 2\alpha$

式中　$k^2 = \dfrac{3cg}{3P_1 + P_2(1+2\sin^2\alpha)}$

2－15　如题图 2－15 所示，楔块 A 的重量等于 P_1，物体 B 的重量为 P_2，水平弹簧的刚度系数为 c，角 α 为已知。如系统自静止状态开始运动，试求三棱柱 A 的加速度。设弹簧在初瞬时无变形，略去弹簧重量摩擦。

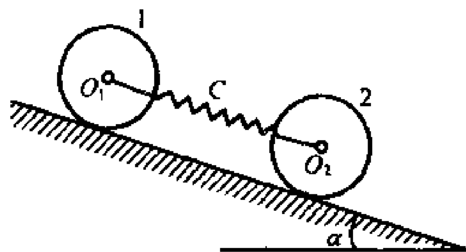


题图 2－15

答：$a_1 = g\sin\alpha + \dfrac{P_2\sin\alpha\cos^2\alpha}{P_1 + P_2\sin^2\alpha} g\cos kt$

式中　$k^2 = cg \cdot \dfrac{P_1 + P_2}{(P_1 + p_2\sin^2\alpha)P_2}$

2－16　如题图 2－16 所示，二均质实心圆盘的半径相同，其质量均为 m，二轴 O_1 和 O_2 用弹簧相连结。弹簧的刚性系数等于 c，其自然长度为 l，弹簧与斜面平行，斜面与水平成 α 角。如运动自静止状态开始，此时弹簧的形变等于 δ_0，试求圆盘中心的运动方程。设圆盘 1 重心的初始位置取为坐标原点，圆盘滚动而不滑动。



题图 2－16

答：$x_1 = \dfrac{g}{3}t^2\sin\alpha + \dfrac{\delta_0}{2}(1-\cos kt)$

$x_2 = \dfrac{g}{3}t^2\sin\alpha + \dfrac{\delta_0}{2}(1+\cos kt) + 1$

式中　$k^2 = \dfrac{4c}{3m}$



题图 2－17

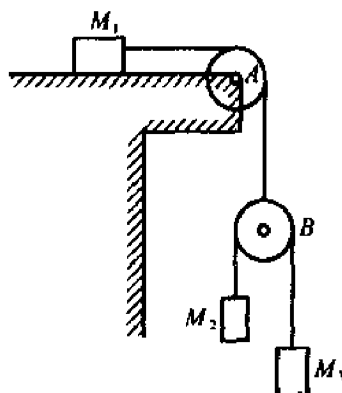
2－17　如题图 2－17 所示，滑轮的 O 轴与刚性系数为 c 的铅垂弹簧一端相连。重物 M 在铅垂降落时解开绳子促使滑轮转动，滑轮的 O 轴则沿铅垂方向振动。设滑轮为均质圆盘，其重量为 Q，重物 M 的重量为 P_0 略去弹簧和绳的重量。系统自静止状态释放。此时弹簧无形变。试求滑轮 O 轴及重物 M 的加速度。

答：$a_0 = g\cos kt$；$a_M = g \cdot \dfrac{2P + Q\cos kt}{2P + Q}$

式中　$k = \sqrt{\dfrac{cg}{Q} \cdot \dfrac{2P+Q}{3P+Q}}$

2－18　如题图 2－18 所示，已知重物 M_1, M_2, M_3 的重量分别为 P_1, P_2, P_3，略去滑轮

与绳的重量以及摩擦，求重物 M_1, M_2, M_3 的加速度。



题图 2－18

答：$a_1 = \dfrac{4gP_2P_3}{P_1(P_2+P_3)+4P_2P_3}$

$$a_2 = g\cdot\frac{P_1(P_2-P_3)+4P_2P_3}{P_1(P_2+P_3)+4P_2P_3}$$

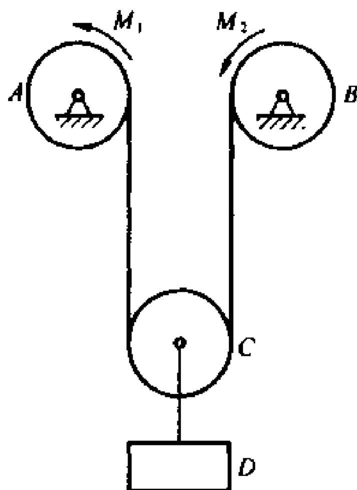
$$a_3 = g\cdot\frac{P_1(P_3-P_2)+4P_2P_3}{P_1(P_2+P_3)+4P_2P_3}$$

2－19　如题图2－19所示，绕过动滑轮 C 的绳索缠绕在鼓轮 A 与 B 上，在滑轮 C 的轴上挂一重为 P 的重物 D。鼓轮的半径均为 r，重为 Q，而动滑轮的重量为 Q_1，且有转矩 M_1, M_2 分别作用于鼓轮上（方向如图所示）。将鼓轮及滑轮均看作均质圆盘，求其角加速度。

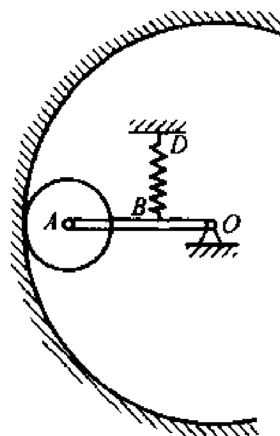
答：$\epsilon = g\dfrac{M_1(2P+4Q+3Q_1)+M_2(2P+Q_1)}{(P+Q+Q_1)(2Q+Q_1)r^2} - \dfrac{(P+Q_1)(2Q+Q_1)r}{(P+Q+Q_1)(2Q+Q_1)r^2}$

2－20　如题图2－20所示，均质摇杆 OA 重为 P，圆盘 A 重为 Q。当系统平衡时，摇杆为水平，弹簧 BD 的静变形为 δ_s，且为铅垂位置。已知 $OA = l$，$OB = a$。求圆盘 A 只滚不滑时，系统在其平衡位置附近作微振动的周期。

答：$\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{\delta_s l(2P+9Q)}{3ag(P+2Q)}}$



题图 2－19



题图 2－20

2－21　如题图2－21所示，均质杆 AB 重为 P，长为 l。$AC = BC$，$CD = OD = \dfrac{a}{2}$，$AB \perp OC$。在平衡时，杆 OC 为铅垂，弹簧 DD_1 为水平，且未被拉紧。求弹簧的刚度系数 c 为多少时，杆 AB 的平衡为稳定，并求出杆 AB 在此平衡位置作微振动的周期。杆 OC 自重不计。

答：$c > \dfrac{4P}{a}$；$\tau = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{P(l^2+12a^2)}{3ag(ca-4P)}}$

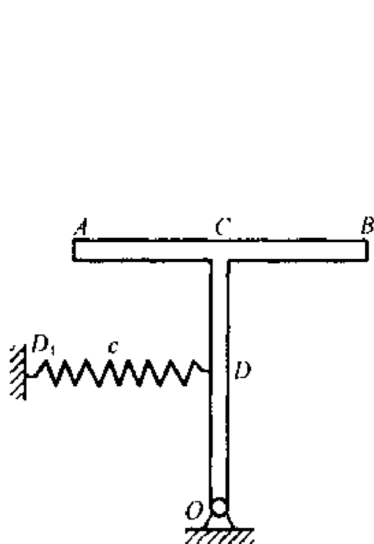
2－22　在铅垂墙与齿轮之间放入一个作铅垂振动的齿条。齿条重为 P_1，齿轮重为 P_2，

弹簧的刚度系数为 c，齿轮可视为均质圆盘。已知当它距平衡位置的距离为 x_0 时将其释放，并且有初速 v_0，摩擦不计。求齿条振动的振幅。

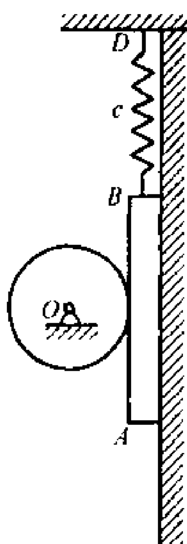
答：$A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{2P_1+P_2}{2cg}v_0^2}$

2－23　如题图 2－23 所示，均质圆柱 A 的半径为 r，质量为 M，均质杆 AB 的长度为 l，质量为 m。铰链 A 和 B 墙处都是光滑接触，地面相当粗糙，以至圆柱只滚不滑。初始时系统静止，且 $\alpha=45°$，然后释放，求初始时刻 A 点和 B 点的运动加速度，杆的角加速度。

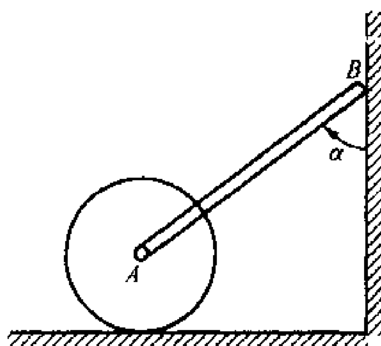
答：$a_A=a_B=\dfrac{3mg}{(9M+4m)}$，$\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}a_A}{l}$。



题图 2－21



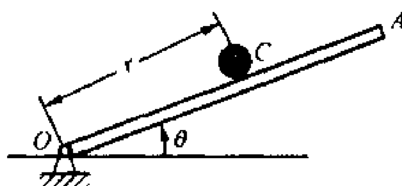
题图 2－22



题图 2－23

2－24　如题图 2－24 所示，均质直棒 OA，长为 l，在水平面上能绕其固定端 O 自由转动，并驱动一个在棒前的小球 C。球与棒的质量相同。初始时小球静止在棒前并离 O 点很近，同时此棒以某一角速度旋转，假定所有接触均为光滑的，求当小球离开端点 A 的瞬间，小球的绝对速度与棒所成的角度。

答：$\theta=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)\approx 26°34'$



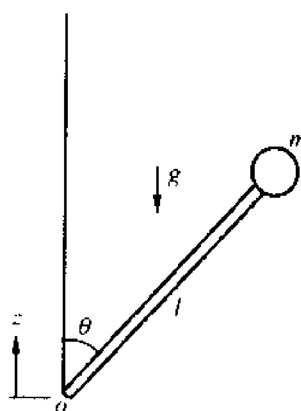
题图 2－24

2－25　如题图 2－25 所示，质量为 m 的质点由长为 l 的无质量刚杆支承而构成倒置摆。销轴 O 按已知规律 $z=A\sin\omega t$ 作铅垂运动。试写出拉格朗日函数，并求出运动微分方程。

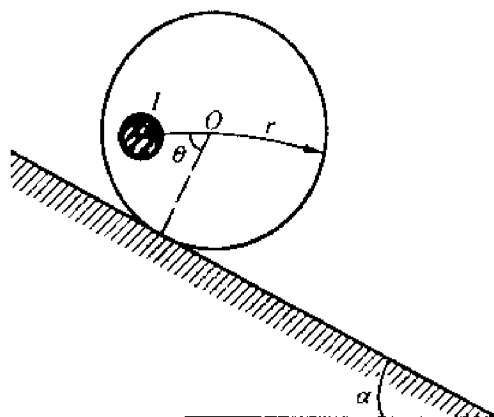
答：$ml^2\ddot{\theta}+mlA\omega^2\sin\omega t\sin\theta-mgl\sin\theta=0$

2－26　如题图 2－26 所示，质量为 m 的质点被嵌入半径为 r 的无质量圆盘。质点到盘中心的距离为 l。圆盘沿平面无滑动地滚下，平面对于水平面的倾角为 α。试应用拉格朗日方法写出该系统的运动微分方程。

答：$m(r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta)\ddot{\theta} + mrl\dot{\theta}^2\sin\theta - mgr\sin\alpha + mgl\sin(\theta + \alpha) = 0$



题图 2 - 25



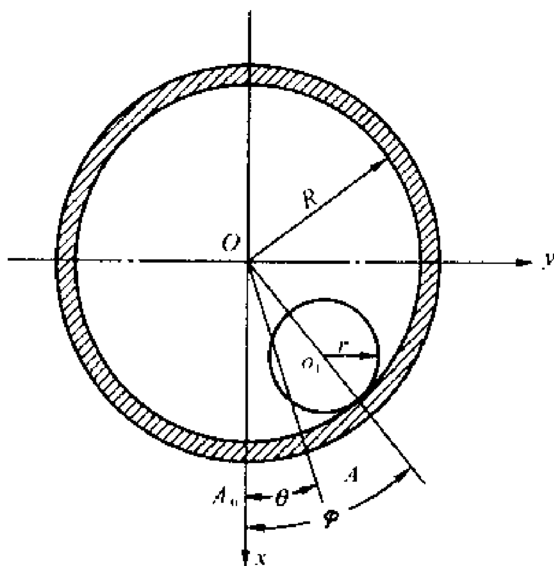
题图 2 - 26

2 - 27　如题图 2 - 27 所示，一粗糙圆柱体质量为 m，半径为 r，在一空心圆柱体内表面上无滑动地滚动。空心圆柱的质量是 M，半径是 R，能绕本身水平轴 O 转动，两圆柱对其自身轴的转动惯量分别为 MR^2 及 $\frac{1}{2}mr^2$，试写出系统运动方程。

答：设 θ—— 空心圆柱转角，φ——两柱心联线的转角，有

$$\left(M + \frac{m}{2}\right)R\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m(R - r)\ddot{\varphi} = 0$$

$$\frac{3}{2}(R - r)\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}R\ddot{\theta} + g\sin\varphi = 0$$

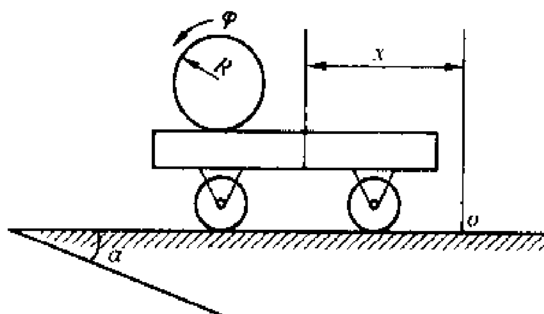


题图 2 - 27

2 - 28　如题图 2 - 28 所示，一车在斜面上无滑动地滚动，斜面与水平面成 α。同时另一圆柱体在车板（与斜面平行）上无滑动地滚动，圆柱体的母线与车板的最大斜坡线相垂直。车的质量（车轮除外）是 M，所有车轮总质量是 m，圆柱体质量是 M_1，设车轮都是均质密实圆盘。试求车的加速度。

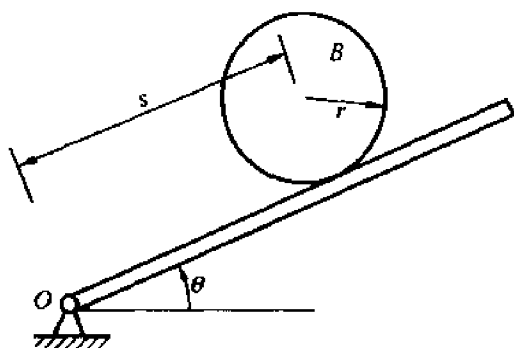
答：小车质心坐标 x，圆柱体相对小车转角 φ，

$$\ddot{x} = \frac{6M + 6m + 2M_1}{6M + 9m + 2M_1}g\sin\alpha$$

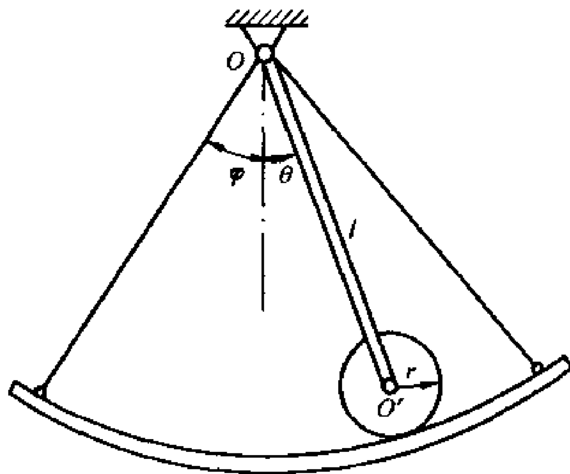


题图 2 - 28

杆 OO'，匀质圆盘 O' 以及薄壁圆筒组成。已知：(1) 均质杆 OO' 长为 l，质量为 m，绕 O 轴转动，以 θ 表示其转角；(2) 均质圆盘 O'，半径为 r，质量为 m，由杆 OO' 带动在薄壁圆筒内作纯滚动；(3) 薄壁圆筒绕轴 O 转动，对 O 轴的转动惯量为 J_o，以 φ 表示其转角。以 θ 和 φ 为广义坐标，写出系统的动能。

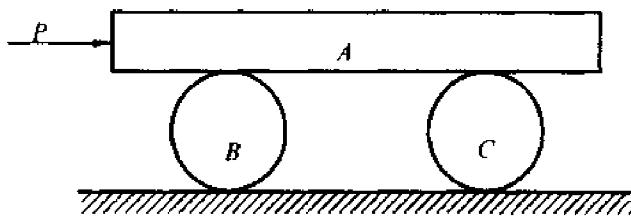


题图 2 - 32



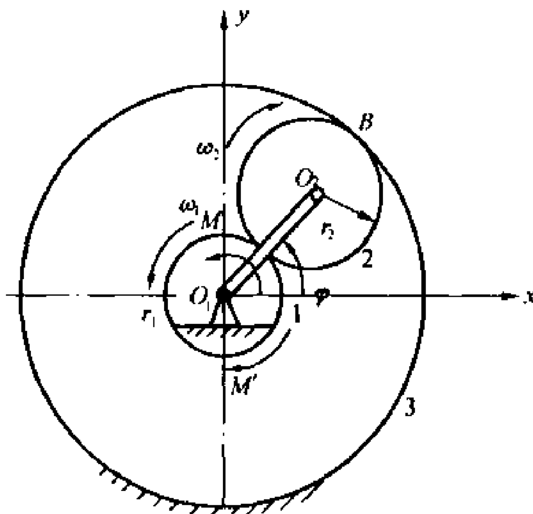
题图 2 - 33

2 - 34　如题图 2 - 34 所示，板 A 重 Q_1 放在两个重各为 Q_2 的均质滚子 B、C 上，设板与滚子间及滚子与地面间均无相对滑动。求在水平力 P 作用下板的加速度。



题图 2 - 34

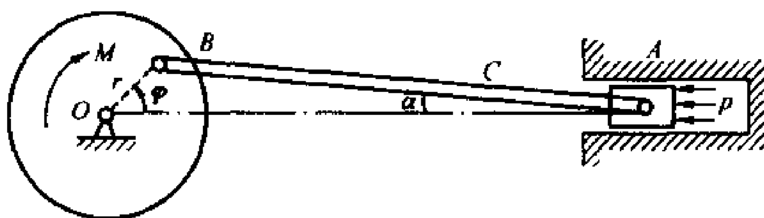
2 - 35　安装在水平面内的行星轮机构如题图 2 - 35 所示，齿轮 2 由曲柄 O_1O_2 带动，并分别与动齿轮 1 和定齿轮 3 相啮合。已知齿轮 1 和齿轮 2 的质量分别为 m_1 和 m_2，半径分别为 r_1 和 r_2，且 $r_2 = 2r_1$，对各自转动轴的回转半径为 ρ_1 和 ρ_2。若作用在曲柄上的主动力矩为 M，齿轮 1 上阻力矩 M'，且均为常量，不计曲柄的质量和轴承摩擦，求曲柄的角加速度。



题图 2 - 35

2 - 36　曲柄连杆机构如题图 2 - 36 所示。已知活塞质量为 m_1。截面积为 S，气缸压强 p；连杆质量为 m_2，它对活塞销 A 的转动惯量为 J_2，杆长 $AB = l$，重心在 C 点，$AC = a$，连杆的偏角 $\alpha = \angle BAO$ 很小，即 $|\alpha| \ll 1$；曲柄及飞轮的转动惯量为 J_3，它受到阻力矩为 M，曲柄长 $OB = r$，设摩擦及重力影响不计，求以飞轮转角 φ 为广义坐标的系统运动微

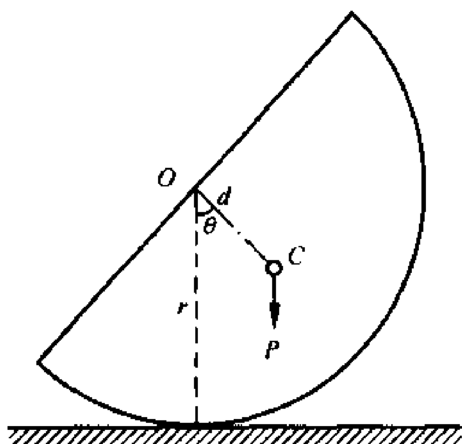
分方程。



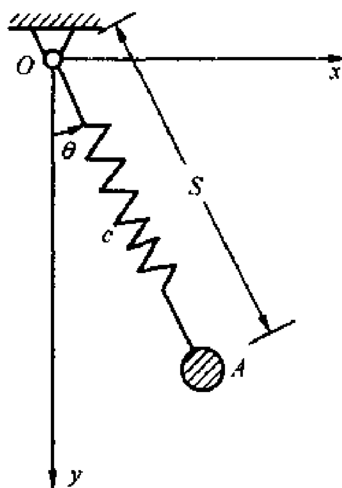
题图 2 - 36

2 - 37　一半径为 r，重为 P 的半圆柱体，在水平面上来回摆动如题图 2 - 37 所示，质心 C 至圆心 O 点的距离为 d，半圆柱体对过质心 C 并与图平面垂直轴的回转半径为 ρ，设接触处有足够的摩擦防止半圆柱体滑动，试求半圆柱体在其铅垂平衡位置附近作微摆动的周期。

2 - 38　用一根无重弹性绳把一质量为 m 的小球 A 悬挂在固定点 O，在其铅垂平面内摆动，如题图 2 - 38 所示。已知弹性绳原长为 l_0，弹性系数为 c，求运动的拉格朗日方程。



题图 2 - 37



题图 2 - 38

2 - 39　半径均为 R 的两圆柱 A、B，用一细绳相连如题图 2 - 39 所示。B 为实心均质圆柱，质量为 m；A 为空心圆柱，质量为 m_2，且沿柱面均匀分布。设 A 铅垂下降，B 沿水平面只滚不滑，滚动摩擦不计，试求两圆柱的角加速度及圆心加速度。

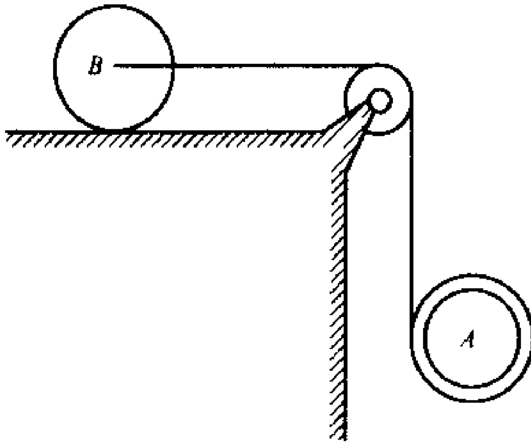
2 - 40　均质圆柱质量为 M，半径为 R，其质心 O 处铰接一均质直杆，其质量为 m，杆长为 l，设圆柱在水平面上只滚不滑，如题图 2 - 40 所示。列出系统的运动微分方程。

2 - 41　质量为 M 的三角形楔块，放在光滑的水平面上。一质量为 m_1 面半径为 R 的均质圆柱体沿楔块斜面无滑动地滚下，如题图 2 - 41 所示。求楔块和圆柱体的运动。

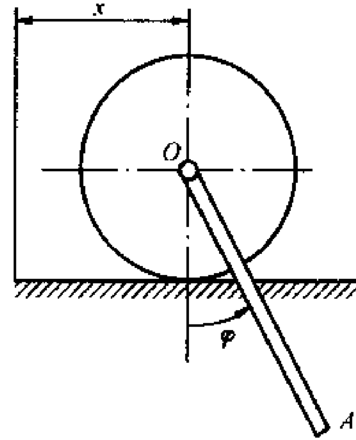
2 - 42　半径为 R，质量为 M 的薄壁圆筒在水平面上只滚不滑，又有一半径为 r，质量为 m 的小环在其内只滚不滑，如题图 2 - 42 所示。列出系统的运动微分方程，并求微摆动的周期。

2 - 43　用一根理想柔绳，其一端系着质量为 m 的小球 A，放在光滑的水平桌面上，绳

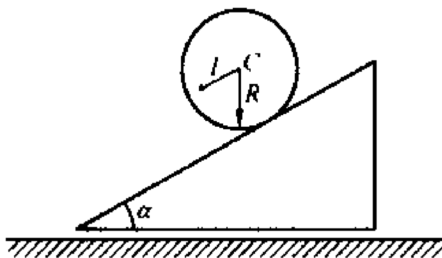
的另一端穿过桌面一光滑的小孔 O 系着质量也为 m 的另一小球 B，使 B 在铅直位置上运动，如题图2－43所示。试求系统运动微分方程的首次积分，并讨论球 A 作圆周运动的条件。



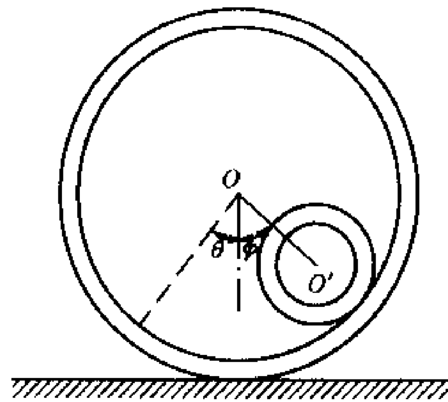
题图 2－39



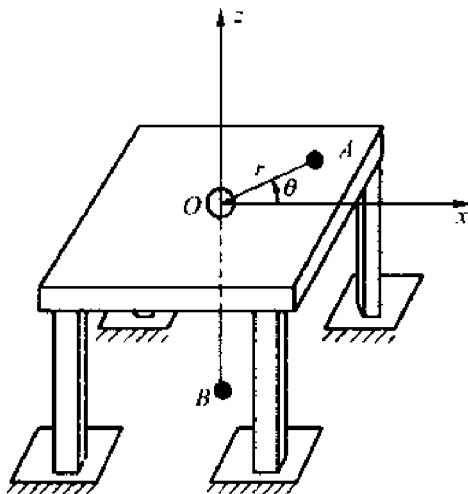
题图 2－40



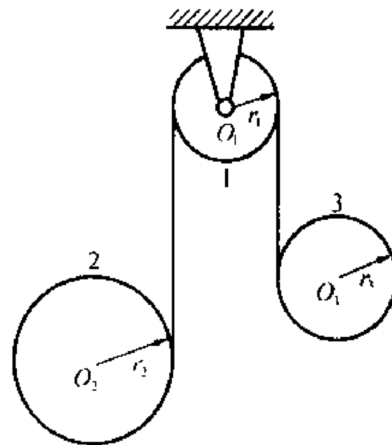
题图 2－41



题图 2－42



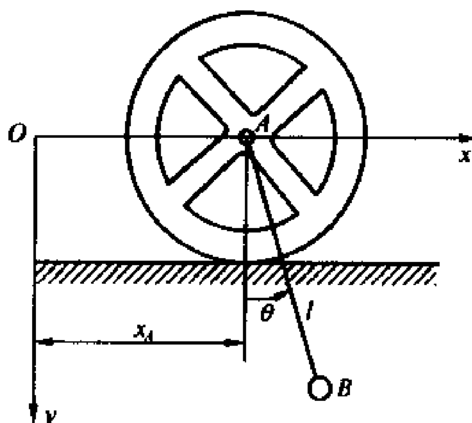
题图 2－43



题图 2－44

2－44　定滑轮 1 的半径为 r_1，质量为 m_1，滑轮上绕有绳子，在其两端分别缠上轮 2 和轮 3，它们的半径分别是 r_2 和 r_3，质量分别是 m_2 和 m_3，且 $m_2 > m_3$，设绳的垂下部分都是铅垂的，绳与各轮间都无相对滑动，绳的质量不计，如题图 2－44 所示。各轮均视为均质圆盘。试求定滑轮 1 的角加速度以及轮 2、轮 3 的质心加速度。

2－45　一质量为 m，长为 l 的单摆的支点系在一可以在直线轨道上作纯滚动的轮子中心 A 点上，如题图 2－45 所示。设轮子视为均质圆环，其质量为 m。



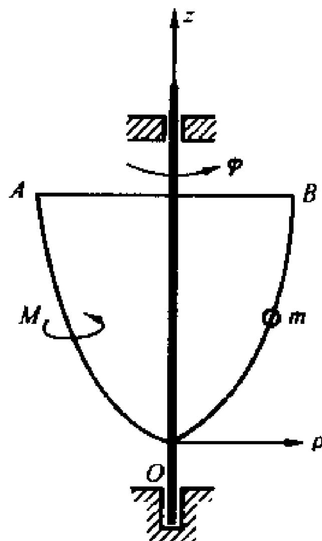
题图 2－45

(1) 以 x_A，θ 为广义坐标写出系统的拉格朗日函数及其运动微分方程的首次积分。

(2) 设开始时，系统处于静止，$\theta = 60°$，求当摆经过铅垂位置时轮心 A 的速度。

(3) 设开始时，系统处于静止，$x_A = 0$，$\theta = \theta_0$，求摆锤 B 的轨迹方程。

2－46　一光滑铁丝被弯成抛物线 $\rho^2 = 2ax$ 形状的框架 $AOBA$，它可绕铅直轴 Oz 转动，转动惯量为 J，铁丝上套有一质量为 m 的小球，可沿其上自由滑动，如题图 2－46 所示。若作用于框架上力偶 M 为 φ 的已知函数，即 $M = M(\varphi)$，力偶矢的方向与 Oz 轴一致，φ 为框架绕 Oz 轴的转角，试列出系统的运动微分方程，并讨论其首次积分。



题图 2－46

3　拉格朗日方程在其它方面的应用

拉格朗日方程不仅能很方便地建立完整系统的动力学微分方程，而且它在工程实际和物理中还有更为广泛的实际应用，下面主要介绍其几种主要的应用。

3.1　动约束反力的求法

在 Lagrange 方程中，理想约束的约束力自动消除，不出现在方程中，这正是 Lagrange 方程的一大优点。但在某些情况下，往往不仅要求系统的运动规律，也需要求出约束力，下面我们就来介绍约束反力的求解方法。

首先解除与欲求约束力有关的约束，解除约束后由约束所限制的自由度将得到释放，也就是说系统的自由度在原有的基础上增加了。设系统所增加的自由度的数目为 m 个，这时约束力将以主动力的身份出现。

解除约束前系统的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q'_j \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{3-1}$$

注意这里 Q'_j 为非有势力主动力所对应的广义力。

解除约束后新系统对应于新增广义坐标的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q''_j \qquad (j=n+1,n+2,\cdots,n+m) \tag{3-2}$$

对于(3－2)式其中 $L=L(q_1,q_2,\cdots,q_{n+1},\cdots,q_{n+m},\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_{n+1},\cdots,\dot{q}_{n+m})$ 是解除约束后系统的 Lagrange 函数，Q''_j 为解除约束后系统的非有势主动力所对应的广义力，它只能出现在(3－2)式中。

为了符合原系统的实际状态，还需引入约束条件，即令 $q_{n+1}=q_{n+2}=\cdots=q_{n+m}=0$，这样由(3－1)式求出系统的运动 $q_1,q_2,\cdots,q_n$，再连同该约束条件一起代入(3－2)式便可求得约束力 $Q'_{n+1},Q'_{n+2},\cdots,Q'_{n+m}$。

例 3－1　求椭圆摆的摆杆拉力 N(如图 3－1 所示)。

解　原有系统的 Lagrange 方程如下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_1\dot{x}+m_2l\dot{x}+l\dot{\varphi}\cos\varphi]=0$$

$$m_2l^2\ddot{\varphi}+m_2l\ddot{x}\cos\varphi=-m_2gl\sin\varphi$$

为了求摆杆的约束力，可解除此杆的约束并以 N 表示杆的未知拉力，解除约束后系统有三个自由度 x,φ,r。

系统新的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2[\dot{x}^2+2(r\dot{\varphi}\cos\varphi+\dot{r}\sin\varphi)\dot{x}+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{r}^2]$$

求作用于新系统上的主动力对应于新增广义坐标 r 的广义力 Q_r，在新系统中令 $\delta r \neq 0, \delta x = 0, \delta\varphi = 0$ 则

$$Q_r \delta r = m_2 g\cos\varphi\delta r - N\delta r$$

所以 $Q_r = m_2 g\cos\varphi - N$，这样对应于坐标 r 的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_2 \dot{r} + m_2 \dot{x}\sin\varphi) - m_2(\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\dot{\varphi}^2) = m_2 g\cos\varphi - N$$

约束条件为：$r = l =$ 常数，因而有 $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ 代入上式则有

$$m_2\sin\varphi\ddot{x} + m_2 l\dot{\varphi}^2 = m_2 g\cos\varphi - N$$

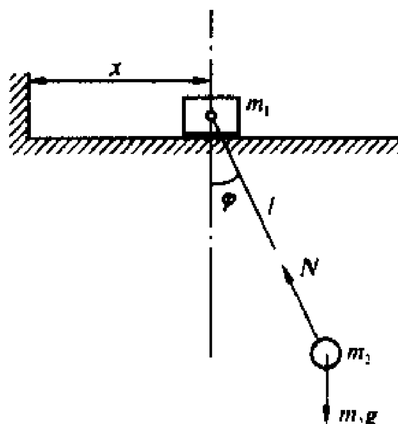


图 3-1

这样有

$$N = -m_2\sin\varphi\ddot{x} - m_2 l\dot{\varphi}^2 + m_2 g\cos\varphi$$

再将原有系统 Lagrange 方程求得的运动 x, φ 代入上式即求得了动约束反力。

3.2 确定系统的相对平衡位置

一个力学系统相对于某一惯性参考系的平衡问题，可以应用虚位移原理来解决。而一个力学系统相对于某一运动参考系平衡位置的确定，则要应用 Lagrange 方程进行研究。

设有 N 个质点组成的完整力学系统，系统具有 n 个自由度，为了寻求系统的相对平衡位置，可以取 n 个广义的相对坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 作为确定系统位形的参数，下面我们来推导完整约束系统的相对平衡方程。

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3N} m_s \dot{x}_s^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} A_j\dot{q}_j + T_0 = T_2 + T_1 + T_0 \tag{3-3}$$

其中

$$A_{ij} = A_{ij}(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$
$$A_j = A_j(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$
$$T_0 = T_0(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i + A_j \tag{3-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A_j}{\partial t} \tag{3-5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_j}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial T_0}{\partial q_j} \tag{3-6}$$

当系统处于相对静止时，必须满足关系式

$$\dot{q}_i = 0 \qquad \ddot{q}_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3-7}$$

将式(3-5)、(3-6)、(3-7)式代入 Lagrange 方程得：

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{3-8}$$

这就是理想完整约束系统的相对平衡方程，其中 A_j 为动能函数中广义速度一次式的系数，T_0 为广义速度的零次项。

在具体问题求解时可不按上面的方程进行，实际上只要按以往的方法列出 Lagrange 方程，然后令各方程中的广义速度、广义加速度均等于零即可。但这里要注意的是所选用的广义坐标是描述系统位形的广义的相对坐标。

例 3-2 如图 3-2 所示，均质直杆 AB，长为 $2a$，质量为 m，两端分别沿一光滑框架的铅垂杆与水平杆做滑动，框架以匀角速度 ω 绕铅垂边转动。求杆相对于框架的平衡位置。

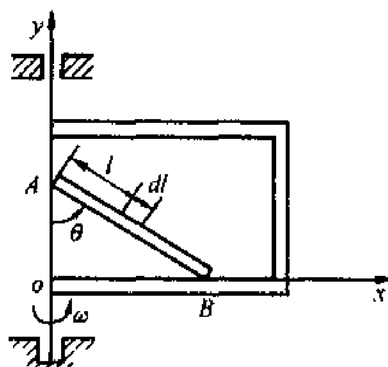


图 3-2

解 该系统具有一个自由度，选取 θ 为广义坐标，oxy 为固连于框架上的动坐标系。离 A 点距离为 l 的元素 $\mathrm{d}l$ 相对于动坐标系的坐标和速度分别为

$$x = l\sin\theta \qquad y = (2a - l)\cos\theta$$

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{y} = -(2a - l)\dot{\theta}\sin\theta$$

相对速度为

$$v_r^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (l^2 - 4al\sin^2\theta + 4a^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2$$

牵连速度为

$$v_e^2 = (l\omega\sin\theta)^2$$

绝对速度

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2$$

杆的动能为

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2a}\int_0^{2a}(l^2\omega^2\sin^2\theta + l^2\dot{\theta}^2 - 4al\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 4a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta)\mathrm{d}l =$$

$$\frac{m}{4a}\left(\frac{8}{3}a^3\omega^2\sin^2\theta + \frac{8}{3}a^3\dot{\theta}^2 - 8a^3\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 8a^3\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) =$$

$$\frac{2}{3}ma^2(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)$$

杆的势能为

$$V = mga\cos\theta$$

求得的广义力为

$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = mga\sin\theta$$

将以上各式代入拉格朗日方程，并令 $\dot{\theta}$、$\ddot{\theta}$ 分别等于零，得

$$-\frac{4}{3}ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = mga\sin\theta$$

即

$$\sin\theta\left(\frac{4}{3}a\omega^2\cos\theta+g\right)=0$$

满足上式等于零的条件,存在两种情况:

(1) $\cos\theta=-\frac{3g}{4a\omega^2},\theta=\cos^{-1}\left(\frac{3g}{4a\omega^2}\right)$

本题中 θ 角不能为负值,故此解不合理。

(2) $\sin\theta=0,\theta=0$

即 AB 杆位置沿着框架的铅垂轴。

3.3 用 Lagrange 方程解决碰撞问题

这一节我们主要研究应用 Lagrange 方法研究具有 n 个自由度理想完整系统的碰撞问题。

碰撞的基本特征是:(1) 在很短时间内产生很大的碰撞力,但碰撞力的冲量为有限值。(2) 碰撞前后速度发生突变,但位形几乎不变。

下面我们来推导适用于研究碰撞问题的 Lagrange 方程。我们只研究碰撞过程开始和结束时运动的变化,而不考虑碰撞过程中每一瞬时的运动情况。

由 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\qquad(j=1,2,\cdots,n)\tag{2-16}$$

我们考虑在$[0,\Delta t]$区间内取上述微分方程的积分形式,将上式两边乘以 $\mathrm{d}t$,然后在区间$[0,\Delta t]$内积分得

$$\int_0^{\Delta t}\mathrm{d}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\int_0^{\Delta t}\frac{\partial T}{\partial q_j}\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t}Q_j\mathrm{d}t\tag{3-9}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right|_{t=\Delta t}-\left.\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right|_{t=0}=\int_0^{\Delta t}Q_j\mathrm{d}t+\int_0^{\Delta t}\frac{\partial T}{\partial q_j}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\Delta t}Q_j\mathrm{d}t+\left|\frac{\partial T}{\partial q_j}\right|_{\max}\cdot\Delta t\approx$$

$$\int_0^{\Delta t}Q_j\mathrm{d}t=I_j\tag{3-10}$$

上式中我们称$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}$为广义动量,$I_j$ 称为广义冲量。

上式整理有

$$\left.\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right|_{t=\Delta t}-\left.\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right|_{t=0}=I_j\tag{3-11}$$

该式即为碰撞问题的 Lagrange 方程。其物理意义为碰撞过程中广义动量的变化等于广义碰撞冲量。

广义冲量的计算方法同广义力的计算方法类似。

1.按公式计算

主动力 $\boldsymbol{F}_i$　　　　力的冲量 $\boldsymbol{S}_i$

广义力 Q_j 广义冲量 I_j

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad I_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{S}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

2. 按虚功的方法计算

令第 j 个广义坐标的虚位移不为零，其余的均为零。

$$\sum_{i=1}^{N} \delta A_{(j)} = Q_j \delta q_j \qquad \sum_{i=1}^{N} \delta W_{(j)} = I_j \delta q_j$$

$$Q_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} \delta A_{(j)}}{\delta q_j} \qquad I_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} \delta W_{(j)}}{\delta q_j}$$

式中 $\delta A_{(j)}$ 为力在虚位移上的功，$\delta W_{(j)}$ 为冲量在虚位移上的功。

例 3－3 在 O 点悬挂的连杆系统如图 3－3 所示，O、A 为柱铰，两杆长皆为 l，质量皆为 m，在静止状态从下端 B 点受一冲量 I 作用，求碰撞后的运动。

解 取转角 φ_1，φ_2 为广义坐标，如图所示 AB 杆重心 C 的坐标为

$$x_c = l\sin\varphi_1 + \frac{l}{2}\sin\varphi_2$$

$$y_c = l\cos\varphi_1 + \frac{l}{2}\cos\varphi_2$$

$$\dot{x}_c = l\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \frac{l}{2}\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2$$

$$\dot{y}_c = -l\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1 - \frac{l}{2}\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2$$

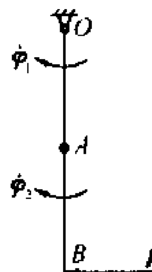


图 3－3

于是系统的动能

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2\cos^2\varphi_1 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}_2^2\cos^2\varphi_2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$\dot{\varphi}_1^2\sin^2\varphi_1 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}_2^2\sin^2\varphi_2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\cdot\dot{\varphi}_2^2$$

整理后有

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{4}{3}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

下面用虚功的方法计算广义冲量

令 $\delta\varphi_1 \neq 0 \quad \delta\varphi_2 = 0$

$Il\delta\varphi_1 = I_1\delta\varphi_1$ 有 $I_1 = Il$

令 $\delta\varphi_1 = 0 \quad \delta\varphi_2 \neq 0$

$Il\delta\varphi_2 = I_2\delta\varphi_2$ 有 $I_2 = Il$

均代入碰撞 Lagrange 方程，并注意 $t = \Delta t$ 时 $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1$，$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_2$，$t = 0$ 时 $\dot{\varphi}_1 = 0$，$\dot{\varphi}_2 = 0$ 便有

$$ml^2\left(\frac{4}{3}\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2\right) = Il$$

$$ml^2\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}_2\right) = Il$$

解以上联立方程便得

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{6I}{7ml} \qquad \dot{\varphi}_2 = \frac{30I}{7ml}$$

值得注意的是，受冲击后两杆的角速度方向相反。如果冲量作用在 AB 杆上任一点，该点至 A 点的距离为 a，则广义冲量为

$$I_1 = Il \qquad I_2 = Ia$$

对应的碰撞 Lagrange 方程为

$$8\dot{\varphi}_1 + 3\dot{\varphi}_2 = 6\frac{I}{ml}$$

$$3\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2 = 6\frac{Ia}{ml^2}$$

值得注意的是，当 $a = \frac{2}{3}l$ 时，即冲量作用点与 AB 杆打击中心重合时，$\dot{\varphi}_1 = 0$。

例 3 - 4　相同的三直杆 AB、BC、CD 由铰链连接成一直线，并从水平位置下落一支座上如图 3 - 4 所示。设到达支座时的速度为 v，并假定碰撞是塑性的(即碰后不离开)，求碰后各杆的角速度，支座的反冲量以及动能的损失。

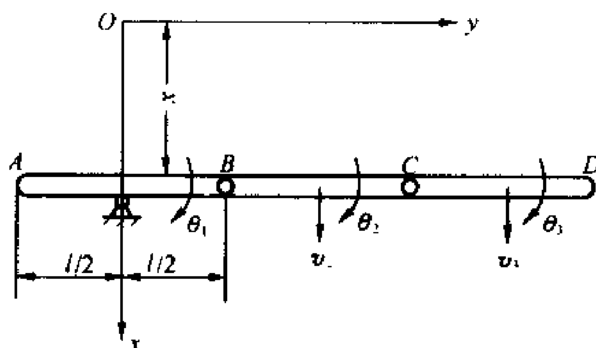


图 3 - 4

解　系统作平面运动，有五个自由度。问题所求的是三个杆的角速度，取 AB 杆质心坐标 x，y，三杆转角 θ_1，θ_2，θ_3 为广义坐标。注意到打击后不产生 y 方向的速度变化。设每杆质量为 m，系统动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_3^2 \tag{1}$$

因

$$v_2 = \dot{x} + \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$v_3 = \dot{x} + \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)$$

故

$$T = \frac{1}{2}m\{\dot{x}^2 + [\dot{x} + \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)]^2 + [\dot{x} + \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 +$$

下面求碰撞后的动能损失，将(7)和(12)代入(2)，得碰撞后动能

$$T|_{t=\Delta t} = \frac{12}{13}mv^2 \tag{14}$$

因此，动能的损失为

$$\Delta T = T|_{t=0} - T|_{t=\Delta t} = \frac{3}{2}mv^2 - \frac{12}{13}mv^2 = \frac{15}{26}mv^2 \tag{15}$$

3.4 Lagrange方程在耗散系统中的应用

3.4.1 系统总能量的变化　耗散力

我们仍然考察具有 n 个自由度的理想约束的完整系统。设在此系统上除了作用有有势力的主动力外，还作用有非有势力的主动力。另外，非有势力主动力所对应的广义力为 Q_j' ($j = 1,2,\cdots,n$)。因此，对于该系统 Lagrange 方程具有如下的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j' \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{3-12}$$

因系统具有普通有势力，所以有势能函数 V，故系统的总机械能可写为

$$E = T + V \tag{3-13}$$

而总的机械能的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{3-14}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned} \tag{3-15}$$

由 Euler 齐次函数定理及 Lagrange 方程上式可写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T_2 + T_1) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial q_j} - Q_j'\right)\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[2T - (T_1 + 2T_0)] + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}Q_j'\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned} \tag{3-16}$$

将上式两边均加上$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$则有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}Q_j'\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3-17}$$

将上式整理有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}Q_j'\dot{q}_j + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t}\right] + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{3-18}$$

由上式我们可以看出，系统总机械能的变化是由三方面因素所致：其一为非有势力的功率$\sum_{j=1}^{n}Q_j'\dot{q}_j$，其二为约束的非定常性所产生的能流，其三是随时间变化的势力场输给系统

的能流。

如果系统是定常的而且势力场不随时间发生变化则有

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^{n} Q_j' \dot{q}_j \tag{3-19}$$

此时，系统的总机械能的变化完全由非有势力作功所致。如果系统同时又是保守系统，则有

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{3-20}$$

此时就是系统的机械能守恒。

这样如果非有势力的功率$\sum_{j=1}^{n} \tilde{Q}_j \dot{q}_j$大于零，则系统的机械能增加。另外，非有势力的功率可写为

$$P = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j' \dot{q}_j \tag{3-21}$$

如果非有势力的功率 P 恒小于零，则系统的总机械能势必减小，我们将这样的非有势主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 称为耗散力，受耗散力作用的系统称为耗散系统。

3.4.2 耗散系统的 Lagrange 方程

工程中遇到的各种阻尼力都可视为耗散力，下面我们只讨论粘性阻尼的情况，设作用在第 i 个质点上的粘性阻力为

$$\boldsymbol{F}_i = -c_i \boldsymbol{v}_i \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{3-22}$$

其中 c_i 为粘性阻尼系数，此时恒有

$$P = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = -\sum_{i=1}^{N} c_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = -\sum_{i=1}^{N} c_i \boldsymbol{v}_i^2 < 0 \tag{3-23}$$

所以，粘性阻尼属于耗散力。由粘性阻尼力所形成的广义力为

$$Q_j' = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} c_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{n} b_{jk} \dot{q}_k \tag{3-24}$$

其中

$$b_{jk} = \sum_{i=1}^{N} c_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{3-25}$$

即粘性阻尼所形成的广义力是广义速度的线性型，其功率恒小于零。

$$P = \sum_{j=1}^{n} Q_j' \dot{q}_j = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k < 0 \tag{3-26}$$

由此可知，系数矩阵$[b_{jk}]$必是正定。不论力之机理如何，只要广义力 Q_j' 是广义速度的线性型，即

$$Q_j' = -\sum_{k=1}^{n} b_{jk} \dot{q}_k \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{3-27}$$

而且$[b_{jk}]$是正定的，则 $Q_j'(j = 1,2,\cdots,n)$ 一定是耗散力。

我们令

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{3-28}$$

则广义耗散力可表示为

$$Q_j' = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \tag{3-29}$$

我们称 F 为耗散函数。同时，我们也可看出

$$F = -\frac{1}{2}P \tag{3-30}$$

对于有线性粘性阻尼的系统，其 Lagrange 方程应有如下简单的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{3-31}$$

由此可知，对于既有保守力也有耗散力的系统，为了列出运动方程，只要建立动能函数 T、势能函数 V 及耗散函数 F 即可。

例 3-5　如图 3-5 所示的二自由度系统，其中两质点的质量分别为 m_1 及 m_2，弹簧刚度分别为 k_1 及 k_2，阻尼器的阻尼系数分别为 c_1 及 c_2，试列出该系统的 Lagrange 方程。

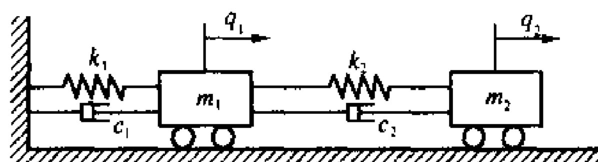


图 3-5

解　取质点偏离各自平衡位置的位移 q_1, q_2 作为广义坐标，于是系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_2)$$

$$V = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_2 - q_1)^2$$

$$F = \frac{1}{2}[c_1\dot{q}_1^2 + c_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2]$$

分别代入耗散系统的 Lagrange 方程得

$$m_1\ddot{q}_1 + (c_1 + c_2)\dot{q}_1 - c_2\dot{q}_2 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 = 0$$

$$m_2\ddot{q}_2 - c_2\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 - k_2q_1 + k_2q_2 = 0$$

这组方程可用多种方法求解，详见振动理论专著。

3.5　Lagrange 方程在电学系统和机电系统中的应用

分析力学是从能量的观点来研究系统的力学问题，那么在电学系统中同样也存在着功能的转换，也有许多有关电学的物理参数。用 Lagrange 的方法是否同样可以描述电学系统

中各参数之间的关系呢?实践证明,这是完全可行的。充分说明了自然界的统一性,也就是说描述各系统参数之间关系的微分方程有惊人的类似。下面我们首先介绍一下电学系统的 Lagrange 方程。

3.5.1 电学系统的 Lagrange 方程

广义回路的概念

机械系统的位形可由 n 个广义坐标来描述,在电路系统中可以取各段导线(两个结点之间的导线)的电荷 $e_s(s = 1,2,\cdots,M)$ 来描述电路状态,很显然有各段的电流 $i_s = \dot{e}_s(s = 1,2,\cdots,M)$,但这些电流间不是独立的,它们应满足各结点处电流之和为零这样的约束条件。同样利用约束条件我们可以选出 m 个独立电荷 $e_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 或广义电流 $i_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 作为描述电路的基本参数,它们类似于机械系统中的广义坐标。一个电路如有 m 个独立电流,我们就说该电路具有 m 个自由度。

对于一个复杂的电路总可以分解成若干个独立的电路,这些独立的电路之间除互感效应外没有其它电学量的依存关系。如图 3 - 6 所示有互感联系的两个电路,我们着重研究电路 A,这个电路只有两个独立电流,我们以后称为广义电流,如取 i_1,i_2 作为广义电流,则 i_3 可由约束方程决定:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{3 - 32}$$

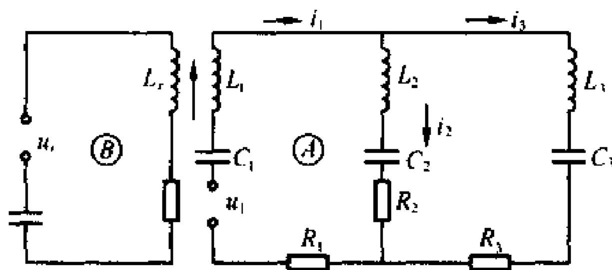


图 3 - 6

同样对上式我们可以取变分,显然独立的变分只有两个:δi_1 及 δi_2,如果取 $\delta i_1 \neq 0,\delta i_2 = 0$,则得到一个有电流变分的回路 GL_1,如取 $\delta i_1 = 0,\delta i_2 \neq 0$,则得到另一个有独立变分的回路 GL_2,如图 3 - 7 所示。推而广之,电路系统中任一广义电流变分 $\delta i_j \neq 0$,而其余广义电流之变分皆为零都对应一个简单回路 GL_j,即广义回路。显然一个电路的广义回路和电路的自由度数目是一致的。

3.5.2 电路系统的 Lagrange 方程

由于电学参数和力学参数的相似性,这里我们先简明指出一下。电学中的电荷的电量 e_s 相当于力学中的位形坐标 x_s。由于有各自的约束条件(在电学系统就是结点方程,在力学系统中就是约束方程),这样我们可以选取它们各自的广义参数,即广义电荷电量 e_j 和广义坐标 q_j,同样由上面可以看到广义参数和原有参数这间由约束方程可得到各自的一组变换式子,在两组坐标空间之间建立起一座桥梁。同样,电学中的广义电流 $i_j = \dot{e}_j$ 相应于力学中的广义速度。

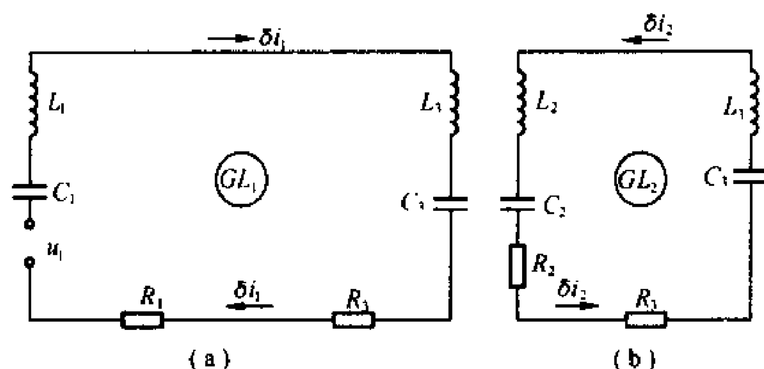


图3－7

下面我们由电学的基本定律来推导电路系统的 Lagrange 方程。

1. 电容的静电能及电位差。广义电容电位差(相应于力学中的势能及有势力)

① 单个电容的静电能及电位差

一个电容储存的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C} \tag{3-33}$$

其中 e 为极板上的电荷,C 为电容。一般来讲 W_e 既与 e 有关,也可能与力学中的广义坐标 q 有关。因为,电容 C 与极板间的距离有关,而极板间的距离在有些情况下也可能被取为力学中的广义坐标。对上式取变分(不考虑力学量的变分影响,因只考虑电学量,所以变分符号用 δ')

$$\delta' W_e = \frac{e}{C}\delta e \tag{3-34}$$

另外我们知道比值 $\frac{e}{C}$ 为两极板的电位差,即 $u = \frac{e}{C}$。考虑到 W_e 是 e 与 q 的函数,我们可以有如下关系:

$$\delta' W_e = \frac{\partial W_e}{\partial e}\delta e \tag{3-35}$$

则有

$$u = \frac{\partial W_e}{\partial e} \tag{3-36}$$

② 任意电路系统的总电位能及广义电位差

系统的总静电能为所有电容器上电能之和

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{C_k}e_k^2 \tag{3-37}$$

通过坐标变换可以将该式表示为广义电荷的二次型

$$W_e(e_1,\cdots,e_m,q_1,\cdots,q_n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{C_{jk}}e_je_k \tag{3-38}$$

对上式取变分有

$$\delta' W_e = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{C_{jk}}e_j\delta e_k = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial W_e}{\partial e_k}\delta e_k \tag{3-39}$$

其中

$$\frac{\partial W_e}{\partial e_k} = u_k^e = \sum_{j=1}^{m} \frac{e_j}{C_{jk}} \tag{3-40}$$

称为第 k 个广义回路中的广义电容电位差。

2. 线圈或电感器的磁能及感应电动势。广义感应电动势

设有两个线圈，线圈 1 中通有电流 i_1 时会产生自感应电动势，邻近线圈 2 中通有电流 i_2，并与线圈 1 耦合时会产生互感电动势，这两部分电动势所对应的总磁能为：

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_{12} i_1 i_2 \tag{3-41}$$

其中 L_{11} 为自感，L_{12} 为互感。另外，线圈 1 中所产生的磁通量为

$$\Phi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \tag{3-42}$$

比较以上两式可知

$$\Phi_1 = \frac{\partial W_m}{\partial i_1} \tag{3-43}$$

所产生的感应电动势为

$$u_1^i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_1} \tag{3-44}$$

在任意电路系统中，所有电感(包括自感与互感)所产生之总磁能我们可以将之写为广义电流的二次型：

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} L_{jk} i_j i_k \tag{3-45}$$

上式中 L_{jk} 是个广义的电感参数，一般而言只是广义坐标的函数。

对上式取变分有

$$\delta' W_m = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} L_{jk} i_j \delta i_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \delta i_k \tag{3-46}$$

由此可知

$$\Phi_k = \frac{\partial W_m}{\partial i_k} = \sum_{j=1}^{m} L_{jk} i_j \tag{3-47}$$

表示第 k 个广义回路中的广义磁通量。

而

$$u_k^i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \tag{3-48}$$

表示第 k 个广义回路中的广义感应电动势。

3. 电耗散函数 Ψ_e

电路系统中电阻所消耗的能量可用其功率来表示，定义电耗散函数为：

$$\Psi_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} R_k i_k^2 \tag{3-49}$$

其中 R_k 为第 k 个电阻值。将上式用广义电流表示，则函数 Ψ_e 可表示为广义电流的二次型，即

$$\Psi_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} R_{jk} i_j i_k \tag{3-50}$$

对上式取变分为

$$\delta\Psi_e = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} R_{jk} i_j \delta i_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k}\delta i_k \tag{3-51}$$

式中

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} = u_k^R = \sum_{j=1}^{m} R_{jk} i_j \tag{3-52}$$

现在我们可以建立以广义电荷表示的电路系统基本方程，根据欧姆定律，在任一广义回路中电源电动势感应电动势之和应等于该回路中电阻及电容器上的电压降，即有：

$$u_k + u_k^l = u_k^R + u_k^c \tag{3-53}$$

其中 u_k 为第 k 个广义回路中的电源电动势，将前面推导的各式代入上式则得到电路的基本方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{e}_k}\right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial \dot{e}_k} = u_k \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3-54}$$

和机械系统的 Lagrange 方程比较，可见它们有完全相同的数学结构。

3.5.3 机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程

所谓机电系统是指机械系统与电磁系统耦合起来的系统，在这种耦合系统中不仅有机械能及电磁能的变化，而且还发生这两种能量的互相交换。这类系统在工程技术中有极其广泛的背景，如电力拖动设备，机械量的测量仪表等。这类系统的动力学方程于 1873 年由 Maxwell 提出，由于无论对机械部分及电磁部分都用 Lagrange 方程形式写成统一的数学形式，所以称为 Lagrange-Maxwell 方程。

机械系统与电磁系统的能量交换涉及到驱动力，所谓驱动力是指质点系统在电磁场中运动时所受的力，两个系统的能量交换是通过驱动力作功实现的。同样我们这里考虑广义驱动力 Q_j^*。

为了得到广义驱动力的表达式，我们利用系统的功率平衡关系

$$\sum_{k=1}^{m} u_k i_k = \sum_{k=1}^{m} u_k^R i_k + \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{n} Q_j^* \dot{q}_j \tag{3-55}$$

以上关系的含义为：电源总功率等于电阻、电感、电容所耗功率及驱动力所耗功率之和。

$$u_k^R = \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} \tag{3-56}$$

W_m 的时间导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial q_j}\dot{q}_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}i_k\right) - \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}i_k + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial q_j}\dot{q}_j = \\ &2\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}i_k + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial q_j}\dot{q}_j\end{aligned} \tag{3-57}$$

式(3－57)中应用了 Euler 齐次函数定理。

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}i_k - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial q_j}\dot{q}_j \tag{3-58}$$

W_e 的时间导数

阻为 R,电源电动势 $E = E_0\sin\omega t$,试列出该机电系统的动力学微分方程。

解 该系统电路系统只有一个广义回路,力学系统描述位形只有一个坐标即可。所以系统具有两个自由度,选取电荷电量 e 和坐标 x 为广义电荷和广义坐标。

机电系统的 Lagrange 函数及耗散函数分别为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{e}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}\frac{s-x}{A}e^2$$

$$\Psi = \frac{1}{2}R\dot{e}^2$$

由机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程得系统的运动微分方程如下

$$M\ddot{e} + R\dot{e} + \frac{1}{A}(s-x)e = E_0\sin\omega t$$

$$m\ddot{x} + kx - \frac{1}{2A}e^2 = 0$$

习 题

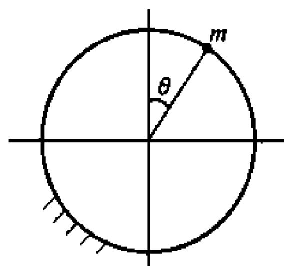
3 - 1 一带孔的小球,在分力为 F_x、F_y 的某一主动力的作用下,在平面内沿着具有任何给定形状的光滑的刚性金属丝滑动。用极坐标证明:不管金属丝的形状或 F_x、F_y 的值如何,金属丝对小球的约束反力的分量 R_x、R_y 的一般表达式为

$$R_x = -F_x + m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\sin\theta$$

$$R_y = -F_y + m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\cos\theta$$

3 - 2 如题图 3 - 2 所示,质量为 m 的质点沿着半径为 r 的光滑球的球面下滑。设 $t = 0$ 时,$\theta = 0$、$v_0 = r\dot{\theta}_0$。证明球对质点的约束反力为

$$R_r = 3mg\cos\theta - mr\dot{\theta}_0^2 - 2mg$$



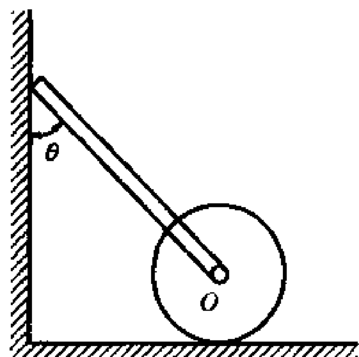
题图 3 - 2

3 - 3 如题图 3 - 3 所示,质量为 m、长为 l 的均质杆,杆上端沿着光滑的墙壁下滑。质量为 M,半径为 r 的圆盘沿水平地面滚而不滑。轴承处及滚动的摩擦不计。求墙壁对杆端点的反力。

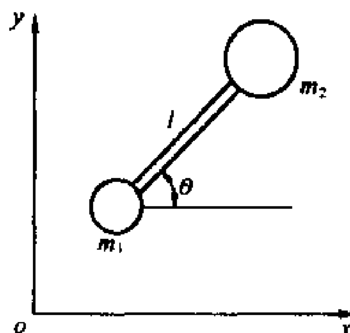
答:$R = \left(m + 2M + \frac{2J_2}{r^2}\right)(l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta)$,式中 J_2 为圆盘对其中心轴的转动惯量。

3 - 4 如题图 3 - 4 所示,哑铃在重力作用下,沿铅垂平面运动,求连接两个质量 m_1、m_2 的杆的张力。

答:$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l\dot{\theta}^2$



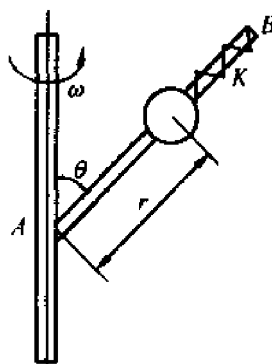
题图 3 - 3



题图 3 - 4

3 - 5 如题图 3 - 5 所示，一质量为 m 的小球可沿光滑杆 AB 滑动，杆与铅垂轴成 θ 角，轴以匀角速度 ω 转动，弹簧刚性系数为 k，求小球的平衡位置。

答：$r = \dfrac{k(l - l_0) - mg\cos\theta}{k - m\omega^2\sin^2\theta}$ 式中 l 为 AB 的长度，l_0 为弹簧原长。



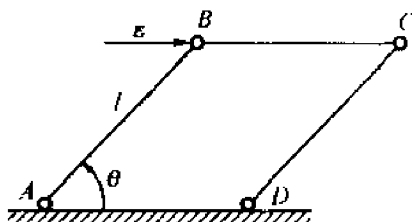
题图 3 - 5

3 - 6 如题图 3 - 6 所示，在铰接平行四边形 $ABCD$ 中，杆 AB 与 CD 的质量为 m_1，杆 BC 的质量为 m_2，$\angle BAD = \vartheta$，杆 AD 不动。今在 B 点沿 BC 线作用一冲量 S。求 B 点的速度与系统的动能。

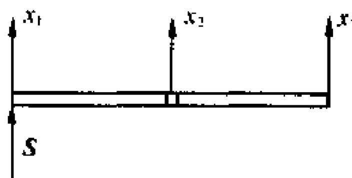
答：$v_B = \dfrac{S \cdot \sin\theta}{\dfrac{2}{3}m_1 + m_2}$ $\quad T = \dfrac{S^2\sin^2\theta}{2\left(\dfrac{2}{3}m_1 + m_2\right)}$

3 - 7 如题图 3 - 7 所示，质量为 m 长度为 l 的两个相同杆子，在他们的端点用铰链连接。在横向冲量 S 作用于坐标 x_1 以前，系统处于静止。求冲击终了时 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$、$\dot{x}_3$ 的值。证明在冲击终了时刻的动能 $T = \dfrac{1}{2}S_1\dot{x}_1$。

答：$\dot{x}_1 = \dfrac{7S}{2m}$ $\quad \dot{x}_2 = -\dfrac{S}{m}$ $\quad \dot{x}_3 = \dfrac{S}{2m}$



题图 3 - 6



题图 3 - 7

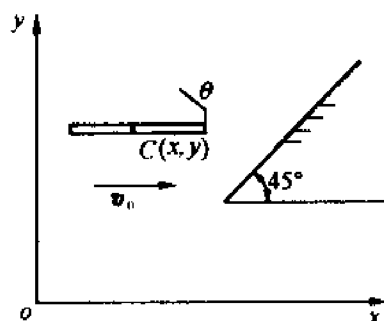
3 - 8 如题图 3 - 8 所示，质量为 m，长为 l 的刚杆以速度 v_0 平行于 x 轴平动。此后，

杆子与光滑墙壁发生非弹性碰撞，亦即，在碰撞后杆端沿墙壁无摩擦地滑动。设碰撞前 θ 和 $\dot{\theta}$ 均为零。试求碰撞终了时刻 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 和 $\dot{\theta}$ 的值。并求出墙壁作用到杆子上的冲量。

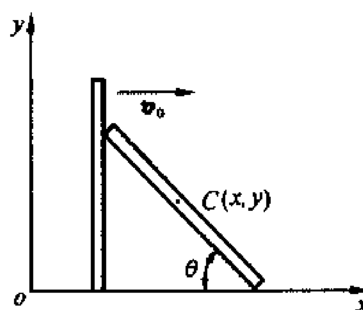
答：$\dot{x}=\frac{4}{5}v_0$ $\dot{y}=\frac{1}{5}v_0$ $\dot{\theta}=\frac{6v_0}{5l}$ $S=\frac{\sqrt{2}}{5}mv_0$

3－9 如题图 3－9 所示，质量为 m，长为 l 的刚杆，当 $t=0$ 时，在 $\theta=45^\circ$ 的位置上处于静止状态。此时铅直墙壁开始沿 x 正向以匀速 v_0 进行运动。假设墙面为光滑的，试求 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{\theta}$ 的初始值，并求出 $t=0$ 在时刻墙壁作用到杆上的冲量。

答：$\dot{x}=\frac{5}{8}v_0$ $\dot{y}=\frac{3}{8}v_0$ $\dot{\theta}=\frac{3}{2\sqrt{2}l}v_0$ $S=\frac{5}{8}mv_0$



题图 3－8



题图 3－9

4　哈密顿正则方程

在前几章中，对于系统在空间的位形我们采用了广义坐标来描述，同时给出了建立完整系统的动力学微分方程的一些方法，并讨论了它们的积分问题。但是我们所建立的 Lagrange 微分方程组，一般来说都是非线性的，除了数值解以外，很难得到其解析形式的解。利用循环积分和能量积分一般也只能在一定条件下求出部分首次积分，并不能求出全部积分。

在动力学微分方程的积分理论上有重要进展的是 Hamilton 和 Jacbi 的工作，Hamilton 将 2 个二阶常微分方程组构成的 Lagrange 方程，变换为含有 2 个变量的 2 个一阶微分方程组，即哈密顿正则方程。下面我们具体介绍一下 Hamilton 正则方程。

4.1　Hamilton 正则方程

4.1.1　完整保守系统的正则方程

对于完整保守系统目前我们也可称之为 Lagrange 系统，该系统存在 Lagrange 函数，即 $L = L(q,\dot{q},t)$，因此，我们可以将 Lagrange 函数中的变量 $q,\dot{q}$ 的全体称为 Lagrange 变量。同样，前面我们介绍了广义动量 p，这里我们将 q,p 的全体称为 Hamilton 变量。由哈密顿变量所构成的函数自然是 Hamilton 函数，即 $H = H(q,p,t)$。用 Hamilton 函数及 Hamilton 变量所表达的动力学微分方程即是 Hamilton 正则方程。

对于完整保守系统的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2-24}$$

广义动量为

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2-46}$$

系统动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{n}B_j\dot{q}_j+C \tag{4-1}$$

则

$$p_j=\sum_{k=1}^{n}A_{jk}\dot{q}_k+B_j \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4-2}$$

由于 $\det|A_{jk}|\neq 0$ 则有

$$\dot{q}_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_j+b_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-3}$$

即广义速度和广义动量之间存在有线性变换的关系。

将(2-46)进行变换有

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \mathrm{d}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\mathrm{d}\dot{q}_j \tag{4-4}$$

对该式左端进行变换

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \mathrm{d}\dot{q}_j = \mathrm{d}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j\Big) - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \mathrm{d}p_j \tag{4-5}$$

由 $L = L(q,\dot{q},t)$ 有

$$\mathrm{d}L = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\mathrm{d}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4-6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\mathrm{d}\dot{q}_j = \mathrm{d}L - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4-7}$$

故

$$\mathrm{d}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j\Big) - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \mathrm{d}p_j = \mathrm{d}L - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4-8}$$

即

$$\mathrm{d}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L\Big) = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \mathrm{d}p_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4-9}$$

定义

$$H = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L \tag{4-10}$$

为哈密顿函数,将(4 - 3)代入该式,则有

$$H = H(q,p,t) \tag{4-11}$$

对该式取微分有

$$\mathrm{d}H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4-12}$$

比较(4 - 9)与(4 - 12)便有

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{4-13}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{4-14}$$

式(4 - 13)、(4 - 14)称为 Hamilton 正则方程,或简称为正则方程。为 $2n$ 个一阶常微分方程组,求解这组方程,便可以得到系统的运动规律。

另外还有两个关系式

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4-15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{4-16}$$

在正则方程中,由于用广义坐标,广义动量来代替广义坐标,广义速度作为独立变量,前者具有动力学意义,而后者只有运动学意义,故前者物理意义更为广泛,应用也方便。

但是也应注意到,建立 Hamilton 正则方程时,一般需要先建立 Lagrange 函数,然后按 $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ $(j = 1,2,\cdots,n)$ 求出 $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q,p,t)(j = 1,2,\cdots,n)$,再代入 Hamilton 函数,即

$$H = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L = H(q, p, t) \tag{4-10}$$

由此看出，用哈密顿正则方程建立动力学方程比用拉格朗日方程建立动力学方程反而麻烦。但是正则方程结构简单、对称，而且为动力学的变换理论创造了有利条件并为 $2n$ 个一阶方程，所以其更具有一定的意义。

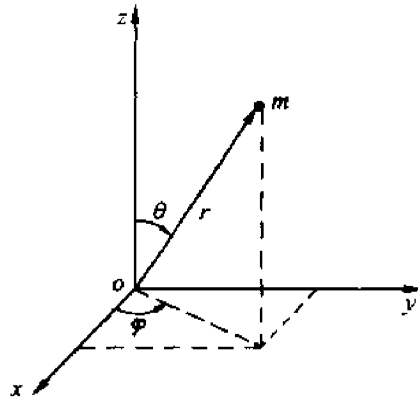


图4－1

例4－1　质量为 m 的质点，在保守力场中运动，如图4－1所示，其势能为 $V = -\frac{km}{r}$，试用球坐标 (r, φ, θ) 写出其哈密顿函数及其正则方程。

解　由图可见直角坐标 (x, y, z) 与广义坐标 (r, φ, θ) 之间关系，有

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

质点的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{km}{r}$$

则广义动量为

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

因此有

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m},\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2},\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

哈密顿函数为

$$H = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p^2\theta}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{km}{r}$$

代入正则方程可得

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m},\qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\theta} - \frac{km}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2},\qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta},\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

4.1.2　一般系统的正则方程

对于一般的非保守系统，其 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j' \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{3-1}$$

将式(3 - 1) 变换一下形式有

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\dot{p}_j-Q_j' \tag{4-17}$$

将上式代入(4 - 9) 有

$$\mathrm{d}H=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\mathrm{d}p_j-\sum_{j=1}^{n}(\dot{p}_j-Q_j')\mathrm{d}q_j-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4-18}$$

再与(4 - 12) 比较得

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4-19}$$

$$\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}+Q_j' \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4-20}$$

这就是一般系统的正则方程,与式(4 - 13)(4 - 14) 比较只是增加一项非有势力的广义力。

例 4 - 2　以球坐标表示自由质点运动的正则方程。

解　设质点的质量为 m,则以球坐标 r,θ,φ 表示的动能和势能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

$$V=V(r,\theta,\varphi,t)$$

$$L=T-V$$

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

由上式解出

$$\begin{cases}\dot{r}=\dfrac{p_r}{m}\\ \dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{mr^2}\\ \dot{\varphi}=\dfrac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\end{cases} \tag{a}$$

这也正是正则方程的前三个方程,将(a) 式代入 Hamilton 函数得

$$H=H(q,p,t)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}-V\right)$$

代入正则方程式中有

$$\begin{cases}\dot{p}_r=-\dfrac{\partial H}{\partial r}=\dfrac{1}{mr^3}\left(p_\theta^2+\dfrac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)+\dfrac{\partial V}{\partial r}\\ \dot{p}_\theta=-\dfrac{\partial H}{\partial \theta}=\dfrac{p_\varphi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}+\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\\ \dot{p}_\varphi=-\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}=\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\end{cases} \tag{b}$$

(a)(b) 合起来就是所要求的正则方程组。

例4-3 有线性阻尼的弹簧-质点系统如图4-2所示。质点的质量为 m,弹簧的刚度系数为 k,阻尼系数为 c。试写出系统的正则方程。

解 系统的广义坐标取为 x,系统为非保守系统

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$V=\frac{1}{2}kx^2$$

$$Q_x=-c\dot{x}$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

$$H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$$

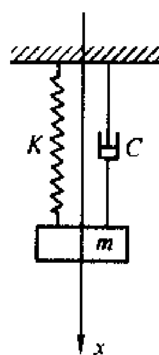


图4-2

代人正则方程得

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p}_x=-kx-c\frac{p_x}{m}$$

4.2 Hamilton 函数的物理意义及正则方程的首次积分

4.2.1 Hamilton 函数的物理意义

如果系统的 Lagrange 函数不显含时间 t 则系统存在着广义能量积分,即:

$$E=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L \tag{2-31}$$

与 Hamilton 函数 $H=\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j-L$ 相比较可见有

$$H=E \tag{4-21}$$

所以对于定常系统 Hamilton 函数就是系统的总能量。

例4-4 质量为 m,半径为 r 的均质小球,在其重力作用下,在一半径为 R 的固定圆形轨道上作纯滚动,如图4-3所示,试用正则方程求球心的切向加速度。

解 图示系统为保守系统,又因小球作纯滚动,故为一个自由度,选 θ 为广义坐标,因此,球自身转开角 φ 为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{4-24}$$

因此有

$$H = h \quad (h\text{ 是积分常数}) \tag{4-25}$$

这也说明了 H 中不显含有时间 t，同时也表明了，若以 Lagrange 函数描述系统的运动时有能量积分，则以 Hamilton 函数描述系统的运动，同样也存在着能量积分。

4.2.3 正则方程的循环积分

如果 Lagrange 函数有循环坐标，即 $q_r(r = 1,2,\cdots,k)$ 不显含在函数 L 中，则由式(4－16) $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ 可知，$q_r(r = 1,2,\cdots,k)$ 也一定不会出现在 Hamilton 函数中。
因而有

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1,2,\cdots,k) \tag{4-26}$$

由正则方程 $\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0$ 有

$$p_r = h_r \quad (r = 1,2,\cdots,k) \tag{4-27}$$

h_r 是积分常数，当 Hamilton 函数不显含某些广义坐标 $q_r(r = 1,2,\cdots,k)$ 时，则与之共轭的广义动量 p_r 是运动的首次积分。

例 4－5 质点 A 的质量为 m，在中心引力场中运动。已知引力 $F = -\frac{\mu m}{r^2}$，其中 μ 是引力常数。试写出其正则方程并进行积分。

解 考虑质点在平面运动，取极坐标 r,θ 为广义坐标

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = -\frac{\mu m}{r}$$

$$L = T - V$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

由于是定常保守系统，所以 Hamilton 函数就是系统的总机械能，即

$$H = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r}$$

正则方程为

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\mu m}{r^2}$$

$$\dot{p}_\theta = 0$$

可见正则方程组为4阶微分方程组。

下面讨论正则方程的首次积分。

首先,考察循环积分,由于H中不含有坐标θ,故有

$$p_\theta = h_\theta$$

这样我们可以重新写出系统新的Hamilton函数及新的正则方程,即

$$\widetilde{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{h_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\theta} = 0$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial r} = \frac{h_\theta^2}{mr^3} - \frac{\mu m}{r^2}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta} = 0$$

即有

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = \dfrac{h_\theta^2}{mr^3} - \dfrac{\mu m}{r^2} \end{cases} \tag{a}$$

这是二阶的微分方程组,由于有了一个循环积分,所以微分方程的阶数比原方程降低了两阶。

其次,考察能量积分,由于新的Hamilton函数不显含时间t,故又存在能量积分,$\widetilde{H} = h$,即

$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{h_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r} = h \tag{b}$$

例4-6　具有水平轨道的框架可绕铅直轴转动,沿轨道有质量为m的小球在运动如图4-4所示。框架的转动惯量为$J = mR^2$,作用在小球上的力具有势函数$V(r)$,其中r是小球到转轴的距离。试写出小球的运动微分方程。

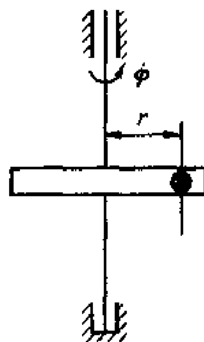


图4-4

解　取框架转角φ及r为广义坐标

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r^2 + k^2)\dot{\varphi}^2]$$

$$L = T - V(r)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{a}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2 + k^2)\dot{\varphi} \tag{b}$$

由于是定常保守系统，故 Hamilton 函数即为系统的总机械能，即

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + k^2}\right] + V(r)$$

Hamilton 函数不含有广义坐标 φ，故有循环积分，即

$$p_\varphi = h_\varphi \tag{c}$$

同时，Hamilton 函数不含有时间 t，故有能量积分，即

$$\frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + k^2}\right] + V(r) = h \tag{d}$$

由(d)式解出 p_r 代入(a)式即可求得 $r(t)$，再由(b)式即可求得 $\varphi(t)$。

4.3 位形空间、状态空间与相空间的概念

4.3.1 位形空间

由 N 个质点组成的系统，其位形可用 $3N$ 个直角坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$ 描述。为了形象地理解和采用几何理论研究复杂系统的运动，我们将以 $x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$ 为正交坐标的 $3N$ 维空间称为系统的直角坐标位形空间，简称 x 空间。x 空间的点称为系统的位形点或代表点。确定系统位形的 $3N$ 个坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$ 在 x 空间确定一个点。相反 x 空间的点代表了系统的一个位形。对于自由系统 x 空间中任一点都是系统的可能位形，但对于非自由系统并非 x 空间中的任一点都是系统的可能位形。在系统运动的同时，位形点也在 x 空间中移动，并画出一条连续曲线，我们称它为系统的 x 空间位形轨迹。

如果我们取广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 作为确定系统位形的坐标，我们将以 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 为正交坐标的 n 维空间称为系统的广义坐标位形空间，简称 q 空间。同样确定系统位形的 n 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 在 q 空间确定了一个点，相反 q 空间的一个点也代表了系统的一个位形。同样系统运动的同时，位形点也在 q 空间中移动，并画出一条连续曲线，我们称它为系统的 q 空间位形轨迹。

如果我们取广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 作为确定系统位形的坐标，我们将以 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 为正交坐标的 $n(n = 3N - l)$ 维空间称为系统的广义坐标位形空间，简称为 q 空间。且确定系统位形的 n 个广义坐标在 q 空间确定一个点，相反取 q 空间一个点则代表系统的一个位形。

对于由 N 个质点组成的系统，若受有 l 个完整约束，即

$$f_s(x, t) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, l)$$

则在 x 空间由于约束的存在，并非 x 空间的任一点都是系统的可能位形，但在 q 空间由于考虑了约束，所以在 q 空间代表点的运动是完全自由的，q 空间的任一点都是系统的可有位形。

换一种看法，我们可以这样来看，即

若每一个完整约束规定一个超曲面，则代表点被限制在这 l 个超曲面之交集上运动。这个交集是一个 $n(n = 3N - l)$ 维超曲面。广义坐标是这 n 维超曲面上的坐标线。

在 $3N$ 维位形空间里，只有在约束所规定的 n 维超曲面上的连续曲线才是系统的可能运动，而在 q 空间里，任一条连续曲线都代表系统的一个可能运动。

如果除完整约束外，系统还受到非完整约束的限制，那么在 q 空间内，代表点虽然可以到达 q 空间内的任一点，但连接 q 空间两点的任意连续曲线却不一定是系统的可能运动轨迹。因为沿 q 空间任意一条曲线运动时点的速度不一定满足非完整约束。

4.3.2 状态空间

系统在任一时刻 t 的位形和各点的速度二者一起称为系统在 t 时刻的状态，当系统的运动微分方程确定之后，系统的运动则完全为其初始状态所决定。

决定系统 t 时刻的状态需要 $6N$ 个量：$x_1, x_2, \cdots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_{3N}$，和位形空间一样，我们将 $6N$ 个变量组成的 $6N$ 维空间称为系统的状态空间。状态空间的点称为状态点。系统在 t 时刻的状态对应着状态空间的一个点，反过来，状态空间的一个点也对应着系统的一个状态。但由于约束的存在，状态空间的一个点所对应的系统的状态不一定能实现。系统运动时不断改变其位形和速度分布，状态点便在状态空间中描出一条曲线，称为状态轨迹。

对于非自由系统，其状态常用广义坐标和广义速度 $q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 来描述，以 $q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 为坐标的 $2n$ 维空间，也称为状态空间，系统的状态与此空间中的点相对应。系统的运动也可以由状态点在 $2n$ 维状态空间的运动来表示。

我们再来看一下位形空间与状态空间的区别，首先通过位形空间的同一点可以有许多位形轨迹，即位形轨迹是可以相交的。这是因为系统的运动不仅取决于给定时刻的位形，还决定于此时每个质点的速度，在同一位置，质点可以有不同的速度。至于状态空间，在系统的动力学方程满足解的存在和惟一性条件，需按动力学方程是否显含时间 t 分为两种情况讨论。不显含时间 t 的称为自冶系统，如定常保守系统；显含时间的称为非自冶系统。前者的状态轨迹既不自交，也不互交，后者则不然。例如 $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$，这是一个非自冶系统。令 $\dot{x} = y$ 则 $\dot{y} = \frac{1}{m}F(x, \dot{x}, t)$ 则状态空间为 (x, y) 平面，由于 $F(x, y, t)$ 显含时间 t，所以在不同的时刻 t_1, t_2，通过 (x_0, y_0) 的状态轨迹的方向分别为

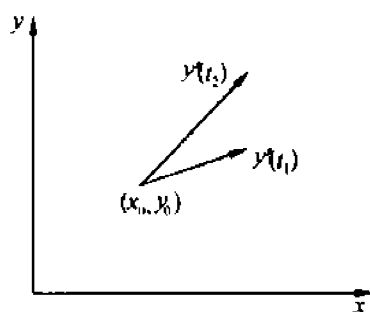


图 4－5

$$y'(t_1) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\bigg|_{t=t_1} = \frac{F(x_0, y_0, t_1)}{my_0}$$

$$y'(t_2) = \frac{F(x_0, y_0, t_2)}{my_0}$$

如图 4－5 所示，两者是不相同的，这表明状态轨迹 c 可能相交，也可能自交。但在 F 不显含时间 t 时，由于改变时间的零点不影响动力学方程的形式，所以轨迹曲线通过任一给定点时的方向是一定的，不随通过时间的不同而改变。因此，状态轨迹不会自交，也不会互交。

其次对于完整系统，广义坐标位形空间里任一条连续曲线都是系统的一个可能运动。但在状态空间里，随意给定一条曲线，系统能否实现该运动，还要看给定曲线的坐标 $(q, \dot{q})$ 是

否符合 $\dot{q}=\frac{dq}{dt}$ 的关系。例如，在系统的状态平面$(q,\dot{q})$上，上半平面状态轨迹的走向都是从左至右的(因为 $\dot{q}>0$)，如图4－6曲线 M_1M_2，而曲线 M_3M_4 则是系统不可能实现的运动，因为在此曲线上$\frac{dq}{dt}<0$，而曲线的坐标 $\dot{q}>0$。

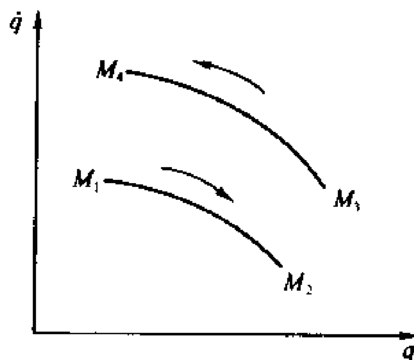


图4－6

4.3.3 相空间

正则方程的建立表明，系统的状态可以由 $2n$ 个正则变量 q_i，p_i 来描述，这 $2n$ 个变量实际上包含了位形和速度分布两个元素在内，这当然比 Lagrange 变量的内容更为丰富，应该能更全面地描述系统的运动过程。我们将由 $2n$ 个正则变量构成的空间称为相空间。相空间实际上是状态空间的另一种形式，系统在任一时刻的状态由相空间中的一个点表示，系统的连续运动过程相当于相点在相空间中描绘出一条连续曲线，即相轨迹。

对于自冶系统而言，在相空间中不同的初始条件相当于相空间中的不同点，而通过相空间中的一个指定点，正则方程则只能确定一条积分曲线，所以相轨迹除了个别奇点外，不会相交，于是全部相轨迹给出一族清晰的图像，使得我们对于各种初始条件下的运动有一个全貌的了解。然而在位形空间中的位形轨迹就没有这种优点。对于初始位形相同，但初始动量不同的条件，位形轨迹都由同一点出发，但以后的位形轨迹可以完全不同。因此，如果我们将所有可能的轨迹在位形空间描绘出来，势必得到杂乱无章的混乱图像。

4.4 正则变换

4.4.1 正则变换的定义

正则方程虽然具有形式简单，结构对称的优点，但直接积分以求封闭形式的解析解时，并未因而减少多少困难。但正则形式的方程对于编制程序在计算机上进行数值积分提供了十分有利的条件，但这是另一问题。

Hamilton 所提出的正则变换理论为正则方程的求解开辟了一条新的途径。

前面我们给出了一组 x 空间和 q 空间的一组线性变化关系式，这里我们在 $2n$ 维相空间内同样给定一组线性变换关系式。

设在 $2n$ 维相空间给定了正则变量变换(一般情况下还包含时间 t 作为参数)：

$$\begin{cases}Q_i = Q_i(q,p,t)\\ P_i = P_i(q,p,t)\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-28}$$

假定雅可比行列式

$$\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_n,P_1,\cdots,P_n)}{\partial(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)} \neq 0 \tag{4-29}$$

以保证存在逆变换

$$\begin{cases} q_i = q_i(Q,P,t) \\ p_i = p_i(Q,P,t) \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-30}$$

若任何正则方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-13}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-14}$$

经式(4-28)所规定的变换后,仍保持正则形式,即

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-31}$$

则称式(4-28)所规定的变换为正则变换,其中式(4-31)中的 $K = K(Q,P,t)$ 是变换后方程的 Hamilton 函数。

如果新的Hamilton函数 K 的结构比原来的Hamilton函数 H 简单,就可能出现这样的情况,用新变量表示的运动方程(4-31)比原方程(4-13)、(4-14)易于积分。我们这样做的目的就是要寻求建立在变换理论上的正则方程的积分方法。

这样这里就提出了两个问题:一是如何建立正则变换,或者说如何判定所给的变换是正则变换;二是如何使变换后的 Hamilton 函数具有最简单的形式。

4.4.2　正则变换的判别定理(或判别条件)

下面我们先来解决第一个问题

定理　对于正则变换式子

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q,p,t) \\ P_i = P_i(q,p,t) \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-28}$$

如果由该式中的 $4n$ 个变量所构成的式子

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\delta Q_i \tag{4-32}$$

成为某一函数 F 的变分,则该变换就属于正则变换,即

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\delta Q_i = \delta F \tag{4-33}$$

式(4-33)即为正则变换的判别式子,其中 F 是新旧变量的函数 $F = F(q,p,Q,P)$,我们将之称为生成函数或母函数。该函数中有 $4n$ 个新旧变量,但同样由于存在正则变换式子,故其中只有 $2n$ 个是独立的,即生成函数只能是 $2n+1$ 个独立变量的函数。而且在这 $2n$ 个变量中,必须有 n 个是旧的变量(q_i 或 p_i),另外还有 n 个是新变量(Q_i 或 P_i)。因此,生成函数 F 只可能是以下四种形式之一

$$F_1(q,Q,t)$$
$$F_2(q,P,t)$$
$$F_3(p,Q,t)$$
$$F_4(p,P,t)$$

下面我们给出具体定理并证明。

如果正则变换式子(4－28)满足上述判别条件(4－33),则新变量满足正则方程

$$\dot{Q}_s=\frac{\partial K}{\partial P_s}\qquad \dot{P}_s=-\frac{\partial K}{\partial Q_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-34}$$

其中 K 为与新变量 Q_s,P_s,t 有关的一个新的哈密顿函数,且有

$$K=H+\frac{\partial F_i}{\partial t}\qquad (i=1,2,3,4) \tag{4-35}$$

式中 F_i 为生成函数或母函数。

证 设上述变换的生成函数为第一种形式 $F_1(q,Q,t)$,即用变量 q,Q 和 t 作为生成函数的独立变量。由于 q,Q 和 t 相互之间是独立的,这样则有

$$\frac{\partial Q_s}{\partial t}=0 \tag{4-36}$$

由判别式

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-\sum_{i=1}^{n}P_i\delta Q_i=\delta F_1(q,Q,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\delta Q_i \tag{4-37}$$

比较等式左右两端对应项相等有

$$p_i=\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\qquad P_i=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-38}$$

另外由(4－38)第二组式子有

$$\frac{\partial P_s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial F_1}{\partial Q_s}\right)=-\frac{\partial^2 F_1}{\partial t\partial Q_s} \tag{4-39}$$

将 $Q_s=Q_s(q,p,t)$ 和 $P_s=P_s(q,p,t)$ 分别对时间 t 求导并考虑到式(4－36)及式(4－39)得

$$\dot{Q}_s=\frac{\mathrm{d}Q_s}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial Q_s}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial Q_s}{\partial t}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial Q_s}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial Q_s}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-40}$$

$$\dot{P}_s=\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial P_s}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial P_s}{\partial t}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial P_s}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)-\frac{\partial^2 F_1}{\partial t\partial Q_s}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial P_s}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial^2 F_1}{\partial t\partial Q_s}\quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-41}$$

记泊松括号为

$$(u,v)_{q,p}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right) \tag{4-42}$$

如果旧变量 q_i,p_i 和新变量 Q_i,P_i 形成正则变换的关系,则存在有下列形式的泊松括号恒等式

$$(u,v)_{q,p}=(u,v)_{Q,P} \tag{4-43}$$

或

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{4-56}$$

同样要求

$$\det\left[\frac{\partial^2 F_3}{\partial q_i \partial P_j}\right] \neq 0$$

4.第四类生成函数 $F_4 = F_4(p, P, t)$

判别条件

$$\sum_{i=1}^{n} - q_i \delta p_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta P_i = \delta F_4(p, P, t) \tag{4-57}$$

第四类变换关系式

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4-58}$$

新 Hamilton 函数

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{4-59}$$

同样要求

$$\det\left[\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_i \partial P_j}\right] \neq 0$$

以上讨论表明,只要按四种方案之一选取独立变量,则任意给定由这些变量构成的生成函数,便可得到一个正则变换。

但对于给定的正则变换,独立变量的选取是不能任意的。例如,对于恒等变换

$$Q_i = q_i \qquad P_i = p_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

显然是正则变换,但此时显然不能取 $q_1, q_2, \cdots, q_n, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 作为独立变量,因为 q_i 与 Q_i 不能独立变化。同样也不能选取 $p_1, p_2, \cdots, p_n, P_1, P_2, \cdots, P_n$ 作为独立变量。

例 4-7　质量为 m 的质点 A,置于光滑水平面上,与一弹性系数为 k,原长为 l_0 的水平弹簧相连,如图 4-7 所示。试用正则变换讨论质点的运动。

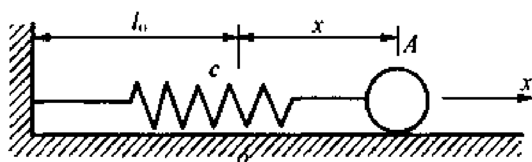


图 4-7

解　设质点在平衡位置为坐标原点 o,取其坐标 x 为广义坐标,则

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad V = \frac{1}{2} k x^2$$

于是

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

令

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

则哈密顿函数可写为

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{a}$$

若取第一类生成函数为

$$F(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega x^2 \cot\omega Q \tag{b}$$

则由式(4－38)有

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} = m\omega x \cot\omega Q \tag{c}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2}kx^2 \csc^2\omega Q \tag{d}$$

新哈密顿函数

$$\begin{aligned} K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H = \\ \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \cot\omega Q + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(1 + \cot^2\omega Q) = \\ \frac{1}{2}kx^2\csc^2\omega Q = P \end{aligned} \tag{e}$$

因 K 不含 Q,故 Q 为循环坐标,由变换后的正则方程式(4－31)

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{f}$$

故得质点的运动微分方程为

$$\dot{Q} = 1 \qquad \dot{P} = 0 \tag{g}$$

积分上式得

$$Q = t + \alpha \qquad P = \beta \tag{h}$$

式中 α,β 为两个积分常数,由初始条件确定。

如将式(h)代入(d)和(c)得原坐标系中的运动方程为

$$x = \sqrt{\frac{2P}{k}}\sin\omega Q = \sqrt{\frac{2\beta}{k}}\sin\omega(t + \alpha)$$

$$p = \sqrt{2\beta m}\cos\omega(t + \alpha)$$

另外,由于$\frac{\partial K}{\partial t} = 0$,$K$ 为常量,且等于系统的总机械能 E,于是得

$$K = H = P = \beta = E$$

故质点的运动方程可为

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\omega(t + \alpha)$$

由此可见,以新变量表示的哈密顿函数 K,是只有变量 P 的函数,而变量 Q 为循环坐标使求解方便,所以能这样,其关键在于选取一个合适的生成函数,这也正是正则变换的因难之处。

这是大家已熟悉的上抛运动的公式。

例 4－10 证明下面两组变换方程分别为正则变换。

(1) $q=\sqrt{\dfrac{2P}{mk}}\sin Q,\ p=\sqrt{2mkP}\cos Q$

(2) $Q=\arctan\left(\dfrac{q}{p}\right),\ P=\dfrac{1}{2}(q^2+p^2)$

解 (1) 由于变换方程中不显含时间 t，则其正则变换条件为

$$\sum_{j=1}^{n}(p_j\mathrm{d}q_j-P_j\mathrm{d}Q_j)=\mathrm{d}F \tag{a}$$

由

$$q=\sqrt{\frac{2P}{mk}}\sin Q,\qquad p=\sqrt{2mkP}\cos Q$$

将 p,P 均用变量 q,Q 表示，得

$$p=mkq\cot Q,\qquad P=\frac{1}{2}mkq^2\frac{1}{\sin^2 Q}$$

将上式代入式(a)得

$$mkq\cot Q\mathrm{d}q-\frac{1}{2}mkq^2\csc^2 Q\mathrm{d}Q=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mkq^2\cot Q\right)=\mathrm{d}F_1(q,Q)$$

说明存在一个生成函数

$$F_1=\frac{1}{2}mkq^2\cot Q$$

故为正则变换。

(2) 由于变换方程中不显含时间 t，则其正则变换条件为

$$\sum_{j=1}^{n}(p_j\mathrm{d}q_j-P_j\mathrm{d}Q_j)=\mathrm{d}F \tag{b}$$

将

$$Q=\arctan\left(\frac{q}{p}\right),\qquad \mathrm{d}Q=\frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{q^2+p^2}$$

$$P=\frac{1}{2}(q^2+p^2)$$

代入式(b)，得

$$p\mathrm{d}q-\frac{1}{2}(q^2+p^2)\frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{q^2+p^2}=\frac{1}{2}(p\mathrm{d}q+q\mathrm{d}p)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}pq\right)=$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}q^2\cot Q\right)=\mathrm{d}F_1(q,Q)$$

说明存在一个生成函数

$$F_1(q,Q)=\frac{1}{2}q^2\cot Q$$

故为正则变换。

4.5 Hamilton-Jacobi 方程

4.5.1 Hamilton-Jacobi 方程

寻找正则变换的目的就是要通过变换使新哈密顿函数 K 含有更多的循环坐标或更简单的形式，以利于求解。因此，我们也可以从相反方向提出问题，即按照要求变换后的 Hamilton 函数 K 所具有的形式去求生成函数。

最简单的 Hamilton 函数莫过于恒等于零，若令

$$K \equiv 0 \tag{4-60}$$

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{4-61}$$

满足上式的生成函数 S 所产生的变换称为化零正则变换

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-62}$$

即

$$Q_i = \alpha_i \qquad P_i = \beta_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-63}$$

其中 α_i,β_i 是 $2n$ 个积分常数，这样便得到了动力学问题的解。

下面我们主要研究第一类生成函数 $S(q,Q,t)$ 中的化零正则变换。

将 S 中的 Q 用 $Q_i = \alpha_i$ 代入有

$$S = S(q_1,q_2,\cdots,q_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,t) \tag{4-64}$$

将其代入正则变换的第一类变换式子式(4 - 38)得

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S(q_1,q_2,\cdots,q_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,t)}{\partial q_i} \tag{4-65}$$

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial S(q_1,q_2,\cdots,q_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{4-66}$$

为了实现第一类正则变换，还要求

$$\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_i}\right] \neq 0$$

因而可由式(4 - 66)将 q 作为 α,β 的函数解出，即

$$q_i = q_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,t) \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-67}$$

将式(4 - 67)代入式(4 - 65)便得

$$p_i = p_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,t) \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-68}$$

式(4 - 67)、式(4 - 68)两组表达式就是以原变量表示的系统状态方程的通解，它包含有 $2n$ 个任意常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，这些常数可由 $t = 0$ 时系统的初始状态 $q_1^0,\cdots,q_n^0,p_1^0,\cdots,p_n^0$ 决定。

由此可见，只要找到了化零正则变换的生成函数 S，动力学问题就解决了。下面我们就来讨论如何找到这个生成函数。

第一类正则变换的生成函数应满足

$$H(q,p,t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{4-69}$$

即由 S 决定的正则变换使得新哈密顿函数 K 变为零,但上式中的 p_i 并非独立变量,而由式(4-65)所决定,故将式(4-65)代入到式(4-69)中有

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_n},t\right)=0 \tag{4-70}$$

S 中含有 n 个任意常数 α,这是关于 S 的一阶偏微分方程,称为Hamilton-Jacobi方程。其中自变量为 $t,q_1,\cdots,q_n$ 共 $n+1$ 个独立变量。

4.5.2 Hamilton-Jacobi 定理

根据偏微分方程理论,一个偏微分方程存在有两类性质不同的解,一类叫通解,通解指的是解中含有独立变量的任意函数,通解又叫做通积分。另一类解叫做全积分。对于一阶偏微分方程来说,若解中所包含的任意常数的数目和偏微分方程中独立变量的数目相等,则这种解就叫做全积分。对于 Hamilton-Jacobi 方程来说,我们所感兴趣的是它的全积分,而不是它的通解,因为通解对于求解哈密顿问题没有什么用途。

现将 Hamilton-Jacobi 方程的全积分写成

$$S=S(q_1,q_2,\cdots,q_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1},t) \tag{4-71}$$

任意积分常数之所以有 $n+1$ 个,原因是独立变量有 $n+1$ 个,所以如果 S 是Hamilton-Jacobi方程的解,则 $S+\alpha_{n+1}$ 也是方程的解(α_{n+1} 是一个积分常数),α_{n+1} 对正则方程的求解不起作用,可以不予考虑。于是,我们所需求的全积分只要求包含 n 个独立的任意常数,而这个要求恰好和生成函数 S 中含有 n 个积分常数 α_i 是一致的。由此可见,Hamilton-Jacobi 方程的全积分的最终形式是

$$S=S(q_1,q_2,\cdots,q_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,t)=S(q,\alpha,t) \tag{4-64}$$

以上的讨论可归结为如下的 Hamilton-Jacobi 定理:

定理 如果 $S(q,\alpha,t)$ 是 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_n},t\right)=0 \tag{4-70}$$

的一个全积分,则在满足条件

$$\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i\partial q_j}\right]\neq 0$$

时,由下列方程

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}=\beta_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-72}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-73}$$

解出的 $q_i=q_i(t,\alpha,\beta),p_i=p_i(t,\alpha,\beta)(i=1,2,\cdots,n)$ 必是原Hamilton方程的通解,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是积分常数。

证明 因 S 是独立参数 q,α,t 的函数,所以由式(4-73)可知 p_i 也是 q,α,t 的函数。将式(4-70)对 α_i 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-74}$$

再将式(4-72)两端对时间 t 取导数,并考虑到 β 为常数,则有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i}\dot{q}_j=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-75}$$

在式(4-74)中,由式(4-73)可得

$$\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \tag{4-76}$$

由式(4-75)减去式(4-74)并注意到式(4-76)可得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-77}$$

上式可以看成为$\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)$的齐次线性方程组,由于系数行列式 $\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\right]\neq 0$,所以本方程组只存在有恒等于零的解,即

$$\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}=0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4-78}$$

这正是正则方程中的第一组方程。下面我们再来寻找另外一组正则方程。

将式(4-70)对 q_j 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial q_j}+\frac{\partial H}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4-79}$$

再将式(4-73)两边对时间 t 求导数得

$$\dot{p}_j-\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_i=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4-80}$$

另外

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_i \tag{4-81}$$

将式(4-79)与式(4-80)相加并注意到式(4-81)得

$$\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4-82}$$

这正是哈密顿正则方程的另外一组方程。可见 Hamilton-Jacobi 方程的全积分就是生成函数 S。

由此可知,寻找哈密顿正则方程的解,可以归结为求 Hamilto-Jacobi 偏微分方程的全积分。只要找到这个全积分,再经过求导运算和代数运算

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-72}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-73}$$

由式(4-72)求导并解出 $q_i=q_i(t,\alpha,\beta)(i=1,2,\cdots,n)$,并代入式(4-73)得 $p_i=p_i(t,\alpha,\beta)(i=1,2,\cdots,n)$ 即得出了正则方程的解。由此可见求解 Hamilton 正则方程的解的问题就变得非常简单了。

4.5.3 几种特殊情况下 Hamilton-Jacobi 方程的求解

1. H 不显含时间 t 的情况

当 Hamilton 函数不显含时间 t 时,有$\frac{\partial H}{\partial t}=0$,于是存在广义能量积分

$$H(q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots,p_n)=h=\alpha_n \tag{4-83}$$

Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=0 \tag{4-84}$$

由于式(4-84)不显含时间 t,故可取 S 为以下形式

$$S=-\alpha_n t+W(q_1,q_2,\cdots,q_n) \tag{4-85}$$

在式(4-85)中 W 是只含广义坐标 q 的未知函数,将上式代入到式(4-84)中便有

$$H\left(q_1,q_2,\cdots,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_1},\frac{\partial W}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=\alpha_n \tag{4-86}$$

这是由于存在广义能量积分而简化了的 Hamilton-Jacobi 方程,函数 W 的地位和生成函数 S 类似,由于这个偏微分方程不显含时间 t,只有 n 个自变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n$,同时也不包含未知函数 W 本身,因而其全积分只包含 $n-1$ 个任意常数,但由于方程本身已有常数 α_n,所以它的积分中也应含有 α_n,因而其全积分应有如下形式

$$W=W(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n) \tag{4-87}$$

由简化的 Hamilton-Jacobi 方程求出 W 之后,根据 Hamilton-Jacobi 定理便有

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=p_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-88}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_j}=\beta_j \qquad (j=1,2,\cdots,n-1) \tag{4-89}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_n}=t+\beta_n \tag{4-90}$$

其中 α_n,β_n 是任意常数,共 $2n$ 个。由式(4-89)可解出 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 表为 t,α,β 的函数,然后再将 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 代入式(4-88)便可得到 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 表为 t,α,β 的函数。这便是正则方程的通解,能量积分的存在,使要解的偏微分方程减少了一个自变量 t。

2.存在循环坐标的情况

若 Hamilton 函数 H 中有 $n-m$ 个循环坐标 $q_{m+1},\cdots,q_n$,即

$$H=H(q_1,\cdots,q_m,p_1,\cdots,p_n,t) \tag{4-91}$$

因而由原正则方程有

$$p_r=\alpha_r \quad (r=m+1,\cdots,n) \tag{4-92}$$

于是由第一类生成函数的变换公式有

$$p_r=\frac{\partial S}{\partial q_r}=\alpha_r \quad (r=m+1,\cdots,n) \tag{4-93}$$

满足以上要求的全积分可以写成如下形式

$$S=\sum_{r=m+1}^{n}\alpha_r q_r+S_0(q_1,\cdots,q_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n,t) \tag{4-94}$$

将上式代入到式(4-84)中便有

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_m,\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S_0}{\partial q_m},\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n,t\right)=0 \tag{4-95}$$

这是由于存在循环积分而简化了的 Hamilton-Jacobi 方程,$n-m$ 个循环坐标的存在,使要

解的偏微分方程减少了 $n-m$ 个自变量,变成了一个只有 $m+1$ 个变量的偏微分方程。

例 4-11 质量为 m 的自由质点,在保守力场中运动,试以直角坐标、柱坐标及球坐标写出其哈密顿-雅可比方程。

解 (1) 在直角坐标系中

势能
$$V = V(x,y,z,t)$$

哈密顿函数为
$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x,y,z,t)$$

Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V(x,y,z,t) = 0$$

(2) 在柱坐标系中

势能
$$V = V(r,\varphi,z,t)$$

哈密顿函数为
$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + p_z^2\right) + V(r,\varphi,z,t)$$

Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V(r,\varphi,z,t) = 0$$

(3) 在球坐标系中

势能
$$V = V(r,\theta,\varphi,t)$$

哈密顿函数为
$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) + V(r,\theta,\varphi,t)$$

Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + V(r,\theta,\varphi,t) = 0$$

例 4-12 试用哈密顿-雅可比方程求解质点的自由落体运动。设 $t=t_0$ 时,质点在 z_0 处,$\dot{z}=0$。

解 系统具有一个自由度,选取 z 为广义坐标,则

动能
$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

势能
$$V = mgz$$

因为是保守系统,则有

$$H = T + V = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = \alpha$$

由 $p = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ 故 $\dot{z} = \dfrac{p}{m}$ 代入上式得

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + mgz = \alpha$$

在 H 中不显含时间 t,且为保守系统,则由式(4-88)有 $p = \dfrac{\partial W}{\partial z}$ 并代入上式,由式(4-86)则有哈密顿-雅可比方程为

$$H\left(z,\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + mgz = \alpha$$

式中 α 为系统的总能量,由起始条件决定。积分上式有

$$W = \int_{z_0}^{z} \sqrt{2m(\alpha - mgz)}\mathrm{d}z$$

由式(4-90)有

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = t - t_0$$

将 W 对 α 求导得

$$t - t_0 = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\alpha - mgz}}$$

由初始条件 $\alpha = mgz_0$ 代入上式有

$$t - t_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2g(z_0 - z)}} = -\sqrt{\frac{2}{8}}\sqrt{z_0 - z}$$

最后得质点自由落体的运动规律为

$$z = z_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

例 4-13 试用哈密顿-雅可比方程求解线性谐振子的运动。

解 这是具有一个自由度的保守系统,选 x 为广义坐标,设弹簧的刚性系数为 k,其哈密顿函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$$

于是哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 = 0 \tag{a}$$

由于哈密顿函数不显含时间 t,故为保守系统,由式(4-85)取

$$S = -ht + W(x) \tag{b}$$

式中 h 为能量常数,将式(b)代入式(a),得

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = h$$

对上式积分得

$$W(x,h) = \sqrt{mc}\int\sqrt{\frac{2h}{k} - x^2}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{mc}\left(x\sqrt{\frac{2h}{k} - x^2} + \frac{2h}{k}\arcsin\sqrt{\frac{k}{2h}}x\right) \tag{c}$$

于是由式(4-90)式(4-88)有正则方程的积分为

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t - \beta, \frac{\partial W}{\partial x} = p \tag{d}$$

将式(c)代入式(d)得

$$t - \beta = \frac{\partial W}{\partial h} = \sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2h}}x\right) \tag{e}$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m\left(h - \frac{k}{2}x^2\right)} \tag{f}$$

由式(e)得

$$x=\sqrt{\frac{2h}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\beta) \tag{g}$$

这就是所要求的谐振子的运动方程。式中常数 h 和 β 由初始条件决定。

例 4－14　单位质量的质点在铅垂平面内运动,已知 $t=0$ 时,$y=0,z=0,\dot{y}=\dot{y}_0$,$\dot{z}=\dot{z}_0$。取 z 轴铅垂向上,y 轴水平,忽略空气阻力,试用哈密顿－雅可比方程求运动方程的积分。

解　该系统为保守系统,故哈密顿函数 $H=T+V$

$$T=\frac{1}{2}(\dot{y}^2+\dot{z}^2)\quad v=gz \tag{1}$$

系统的哈密顿函数为

$$H(q,p,t)=\frac{1}{2}(p_y^2+p_z^2)+gz \tag{2}$$

于是哈密顿－雅可比方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+gz=0 \tag{3}$$

由于方程(3)中不含有 t 及 y 故由式(4－85)式(4－94)可以设

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\alpha_1,\frac{\partial S}{\partial y}=\alpha_2 \tag{4}$$

代人式(3)便得到

$$\frac{\partial S}{\partial z}=\sqrt{-2gz-2\alpha_1-\alpha_2^2}$$

从而可得到方程(3)的全积分为

$$S=\alpha_1t+\alpha_2y-\frac{2}{3}\sqrt{2g}\left(-z-\frac{2\alpha_1+\alpha_2^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{5}$$

由式(4－72)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

得

$$t+\sqrt{\frac{2}{g}}\left(-z-\frac{2\alpha_1+\alpha_2^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}=\beta_1 \tag{6}$$

$$y+\sqrt{\frac{2}{g}}\left(-z-\frac{2\alpha_1+\alpha_2^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}=\beta_1 \tag{7}$$

再由式(4－73)

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

得

$$\alpha_2=\dot{y} \tag{8}$$

$$\sqrt{-2gz-2\alpha_1-\alpha_2^2}=\dot{z} \tag{9}$$

任意常数 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的值可以由运动的初始条件确定。

例 4－15　一质量为 m,半径为 a 的均质圆柱体,沿倾角为 α 的粗糙斜面自由滚下,如

例4－16 开卜勒问题：一质点 A，质量为 m，在一中心引力场的作用下，作用力 $F=\frac{\mu m}{r^2}$。利用雅可比方程求质点的运动。

解 我们首先考虑质点在平面内运动并用极坐标 (r,θ) 确定质点的位置，则质点的动能和势能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V=-\frac{\mu m}{r} \tag{1}$$

广义动量为

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\ p_\theta=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \tag{2}$$

由于系统是定常保守系统，其哈密顿函数为

$$H=T+V=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{\mu m}{r}=\alpha_n \tag{3}$$

这里常数 α_n 是系统的总机械能。由于 H 中既不显含时间 t，又不显含广义坐标 θ，所以本题属于既是保守系统，又有循环坐标的情况。故由式(4－85)及式(4－94)取 S 为

$$S=-\alpha_n t+\alpha_\theta\theta+W(r,\alpha_n,\alpha_\theta) \tag{4}$$

则哈密顿－雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2}-\frac{\mu m}{r}=\alpha_n \tag{5}$$

对上式积分得

$$W=\int\sqrt{2m\alpha_n+\frac{2\mu m^2}{r}-\frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\mathrm{d}r \tag{6}$$

由式(4－90)有

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial \alpha_n}=\int\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\alpha_n+\frac{2\mu m^2}{r}-\frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} \tag{7}$$

再由式(4－72)有

$$\beta_\theta=\frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta}=\theta+\frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta}=\theta+\int\frac{\alpha_\theta\mathrm{d}r}{r\sqrt{2m\alpha_n r^2+2\mu m^2 r-\alpha_\theta^2}} \tag{8}$$

这里 t_0，β_θ 都是任意常数。

3. 可分离变量的情况

(1) 设系统为定常保守系统，Hamilton 函数 H 具有如下形式

$$H=G(f_1(q_1,p_1),\cdots,f_n(q_n,p_n)) \tag{4-96}$$

即 G 是 $f_1,\cdots,f_n$ 的函数，而每个 f_i 只含有一对共轭变量 (q_i,p_i)，又因 H 不显含时间 t，所以应取简化了的 Hamilton－Jacobi 方程形式，即

$$G\left[f_1\left(q_1,\frac{\partial W}{\partial q_1}\right),\cdots,f_n\left(q_n,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right]=h \tag{4-97}$$

显然，由于该式的右端为常数，而左端的每一个函数 f_i 都是任意函数，故也必为常数，

可令

$$f_i\left(q_i,\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)=\alpha_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-98}$$

其中 α_i 是任意常数,于是有

$$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=h \tag{4-99}$$

由式(4-98)解出$\frac{\partial W}{\partial q_i}$(为此要求 f_i 必须显含 p_i,即$\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\neq 0$),由此得出

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=F_i(q_i,\alpha_i) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-100}$$

积分上式可得

$$W=\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\alpha_i)\mathrm{d}q_i \tag{4-101}$$

由 4.5.3.1 节我们知 S 可取为以下形式

$$S=-ht+W=-G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)t+\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\alpha_i)\mathrm{d}q_i \tag{4-102}$$

由于在本情况中有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_i}=\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i},\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_j}=0 \quad (i\neq j)(i,j=1,2,\cdots,n)$$

因而 Hamilton - Jacobi 定理中所要求的条件

$$\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_j}\right]=\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i}\neq 0 \tag{4-103}$$

这是因为由于有关系式式(4-98)及式(4-100)

即

$$f_i(q_i,p_i)=\alpha_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$p_i=F_i(q_i,\alpha_i) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

便有

$$\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_i}=1=\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i}$$

所以

$$\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)^{-1}\neq 0$$

故有式(4-103)成立,由此式(4-102)给出的 S 是 Hamilton - Jacobi 方程的全积分,将此全积分代入 Hamilton - Jacobi 定理中要求的正则变换式

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i,\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}=\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

将式(4-102)代入上式便有

$$-\frac{\partial G}{\partial\alpha_i}t+\int\frac{\partial F_i(q_i,\alpha_i)}{\partial\alpha_i}\mathrm{d}q_i=\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-104}$$

$$p_i=F_i(q_i,\alpha_i) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-105}$$

由式(4-104)给出位形空间的解答,然后再由式(4-105)给出相空间中的解答。

例 4-17　试用哈密顿-雅可比方程找出一个自由度系统自由振动方程的解。

解 一个自由度系统的自由振动,其 Hamilton 函数 H 为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2$$

由式(4－96)有

$$f_1(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2 \tag{a}$$

令

$$f_1(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2=\alpha$$

由式(4－97)有

$$G(\alpha)=h=\alpha$$

由式(a)得出

$$p=F(q,\alpha)=\sqrt{2m\alpha-mkq^2} \tag{b}$$

由式(4－104)有

$$-t+\int\frac{mdq}{\sqrt{2m\alpha-mkq^2}}=\beta \tag{c}$$

即

$$q=A\sin(\omega t+\beta) \tag{d}$$

其中 $A=\sqrt{\frac{2\alpha}{k}},\omega^2=\frac{k}{m}$

(2) 如果 Hamilton 函数有如下形式

$$H=g_n\{\cdots g_3\{g_2[g_1(q_1,p_1),q_2,p_2],q_3,p_3\}\cdots,q_n,p_n\} \tag{4－106}$$

则取简化了的 Hamilton－Jacobi 方程形式,即

$$g_n\{\cdots g_3\{g_2[g_1(q_1,\frac{\partial W}{\partial q_1}),q_2,\frac{\partial W}{\partial q_2}],q_3,\frac{\partial W}{\partial q_3}\}\cdots,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_n}\}=h \tag{4－107}$$

显然,由于该式的右端为常数,而左端的每一个函数 g_i 都是任意函数,故也必为常数,可令

$$\begin{aligned}
&g_1\left(q_1,\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)=\alpha_1\\
&g_2\left(\alpha_1,q_2,\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)=\alpha_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&g_n\left(\alpha_{n-1},q_n,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=\alpha_n
\end{aligned} \tag{4－108}$$

设函数 $g_i(\alpha_{i-1},q_i,p_i)$ 中确实含有 p_i,因而$\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\neq 0$,由式(4－108)便可解出各偏导数如下

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial q_1}=G_1(q_1,\alpha_1)\\
&\frac{\partial W}{\partial q_2}=G_2(q_2,\alpha_1,\alpha_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial W}{\partial q_n}=G_n(q_n,\alpha_{n-1},\alpha_n)
\end{aligned} \tag{4－109}$$

所以 W 的全微分为

$$\mathrm{d}W = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i = \sum_{i=1}^{n} G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)\mathrm{d}q_i \tag{4-110}$$

于是有

$$W = \sum_{i=1}^{n}\int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)\mathrm{d}q_i \tag{4-111}$$

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^{n}\int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)\mathrm{d}q_i \tag{4-112}$$

由式(4－109)及式(4－112)在本情况中有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (i < j, \quad i, j = 1, \cdots, n)$$

因而 Hamilton－Jacobi 定理中所要求的条件

$$\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} \neq 0 \tag{4-103}$$

这个不等式存在的理由是因为存在以下诸式

$$g_i(\alpha_{i-1}, q_i, p_i) = \alpha_i \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{4-113}$$

它们等价于

$$p_1 = G_1(q_1, \alpha_1)$$

$$p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \quad (i = 2, \cdots, n) \tag{4-114}$$

由此可得

$$\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_i} = 1 = \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

所以

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)^{-1} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

故有式(4－103)成立，再由式(4－114)可得

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}} = -\left(\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_{i-1}} \Big/ \frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right) \quad (i = 2, \cdots, n) \tag{4-115}$$

于是将 S 的表达式(4－112)代入到变换式(4－72)(4－73)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4-72}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4-73}$$

得

$$\int \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}\mathrm{d}q_i + \int \frac{\partial G_{i+1}}{\partial \alpha_i}\mathrm{d}q_{i+1} = \beta_i \quad (i = 1, \cdots, n-1)$$

$$-t + \int \frac{\partial G_n}{\partial \alpha_n}\mathrm{d}q_n = \beta_n \tag{4-116}$$

习 题

4-1 已知力学系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{5}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)+3\cos q_1+\cos q_2$$

试求系统的哈密顿函数 H。

4-2 已知力学系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{3}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-q_1^2-\frac{1}{2}q_1^2-q_1q_2$$

试求系统的哈密顿函数 H。

答：$H=\frac{1}{6}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2+q_1^2+\frac{1}{2}q_2^2+q_1q_2$

4-3 已知力学系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{4}(\dot{q}_1+\dot{q}_3)^2+\frac{1}{4}(\dot{q}_2+\dot{q}_4)^2$$

势能为

$$V=2(q_1^2+q_2^2-q_1q_2)+\frac{1}{4}(q_3^2+q_4^2)$$

试求系统的哈密顿函数 H。

答：$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+3p_3^2+3p_4^2-2p_1p_3-2p_2p_4)+$

$2(q_1^2+q_2^2-q_1q_2)+\frac{1}{4}(q_3^2+q_4^2)$

4-4 已知某二自由度系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}[(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2+a\dot{q}_1^2t^2]$$

其中 a 为常数，势能为

$$V=a\cos q_2$$

试求系统的哈密顿函数 H。

答：$H=\frac{1}{2at^2}(p_1+p_2)^2+\frac{1}{2}p_2^2+a\cos q_2$

4-5 已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=q_1p_2-q_2p_1+a(p_1^2+p_2^2)$$

求系统的拉格朗日函数 L。

4-6 已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}\frac{p_1^2+p_2^2}{q_1^2+q_2^2}+a(q_1^2+q_2^2)$$

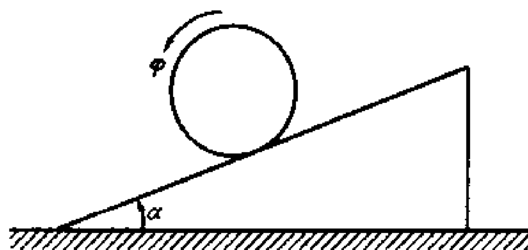
其中 a 为常数，试求系统的拉格朗日函数 L。

答：$L=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-2a)$

$$H = \frac{1}{2(m_1+m_2)}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2\mu}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+\frac{1}{2}c(r-a)^2$$

其中 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

4 - 13 如题图 4 - 13 所示，质量为 M 的三棱柱可沿光滑的水平面滑动。半径为 r、质量为 m 的均质圆柱可沿与水平成 α 角的棱柱侧面无滑动地滚动。试求系统的哈密顿函数，建立运动的正则方程。



题图 4 - 13

答：取棱柱位移 x，圆柱相对棱柱转角 φ 为广义坐标，则哈密顿函数为

$$H = \frac{3mr^2p_x^2+2(M+m)p_\varphi^2-4mrp_xp_\varphi\cos\alpha}{2mr^2[3M+m(1+2\sin^2\alpha)]}$$

正则方程为

$$\dot{x} = \frac{3p_xr-2p_\varphi\cos\alpha}{r[3M+m(1+2\sin^2\alpha)]},\ \dot{p}_x = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2(M+m)p_\varphi-2mp_xr\cos\alpha}{mr^2[3M+m(1+2\sin^2\alpha)]},\ \dot{p}_\varphi = mgr\sin\alpha$$

4 - 14 试求双摆的哈密顿函数，并建立正则方程。双摆由质量为 m 长度为 l 的两个相同的均质杆组成。

答：取两杆与铅垂线夹角 φ,ψ 为广义坐标，则系统的哈密顿函数为

$$H = \frac{6[p_\varphi^2+4p_\psi^2-3p_\varphi p_\psi\cos(\psi-\varphi)]}{ml^2[7+9\sin^2(\psi-\varphi)]}-\frac{3}{2}mgl\cos\varphi-\frac{1}{2}mgl\cos\psi$$

4 - 15 在均匀重力场中，一刚度为 k 的弹簧下端挂一质量为 m 的杆。应用哈密顿方法求摆在竖直平面内的运动方程。

答：$H = \dfrac{1}{2m}\left(p_r^2+\dfrac{1}{r^2}p_\theta^2\right)-mgr\cos\theta+\dfrac{1}{2}k(r-r_0)^2$

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mg\cos\theta+k(r-r_0)=0$$

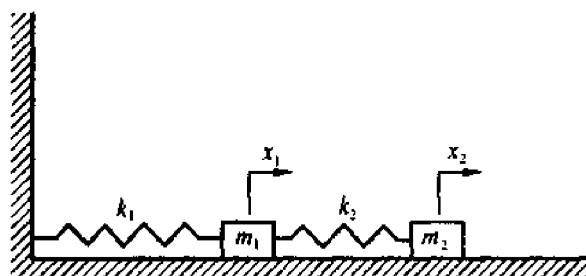
$$mr^2\ddot{\theta}+2m\dot{r}\dot{\theta}+mgr\sin\theta=0$$

4 - 16 如题图 4 - 16 所示，两弹簧刚度为 k_1 和 k_2，两物块质量为 m_1 和 m_2，并受有粘性阻力分别为 $-b_1\dot{x}_1$、$-b_2\dot{x}_2$。求系统的哈密顿函数和正则方程。

答：$H = \dfrac{p_{x1}^2}{2m_1}+\dfrac{p_{x2}^2}{2m_2}+\dfrac{1}{2}k_1x_1^2+\dfrac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2$

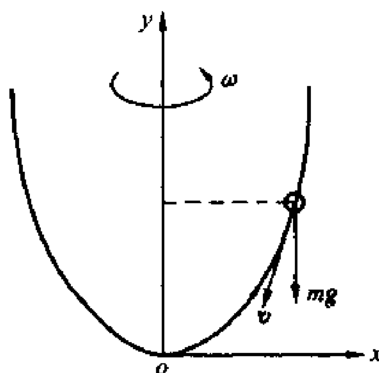
$$\dot{x}_1 = \frac{p_{x1}}{m_1},\ \dot{x}_2 = \frac{p_{x2}}{m_2}$$

$$\dot{p}_{x1} = -k_1x_1+k_2(x_2-x_1)-b_1\dot{x}_1,\ \dot{p}_{x2} = -k_2(x_2-x_1)-b_2\dot{x}_2$$

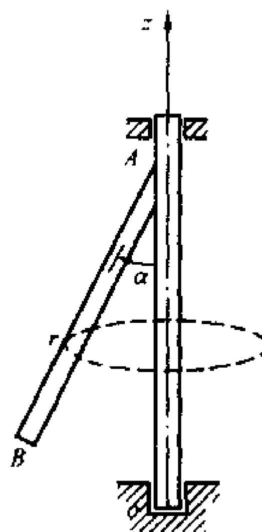


题图 4 - 16

4 - 17 如题图 4 - 17 所示，一光滑金属丝被弯成方程为 $x^2 = 4ay$ 的抛物线形，式中 a 为常数，o 点为顶点，金属丝以匀角速度 ω 绕铅垂轴 y 转动，一质量为 m 的小环，套在此金属丝上，并可沿着金属丝滑动。试用正则方程求小环在 x 方向的运动微分方程。



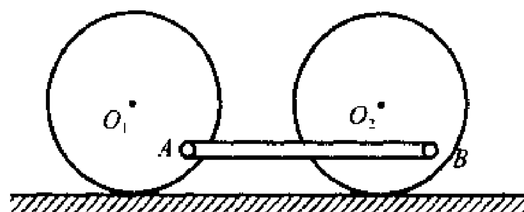
题图 4 - 17



题图 4 - 18

4 - 18 一直管 AB 与铅垂轴 oz 成 α 角固结在轴上 A 点处，并以匀角速度 ω 绕该轴旋转，如题图 4 - 18 所示。一质量为 m 的质点在管内作无摩擦滑动，用正则方程求质点的相对运动微分方程。

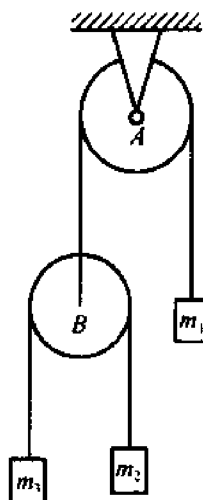
4 - 19 两个相同的均质车轮，重量为 P，半径为 R，由一均质（平行于 O_1O_2）杆 AB 相连，重为 W，车轮在水平面上作无滑动地左右摆动，如题图 4 - 19。设 $O_1A = O_2B = a$，用正则方程求微摆动周期。



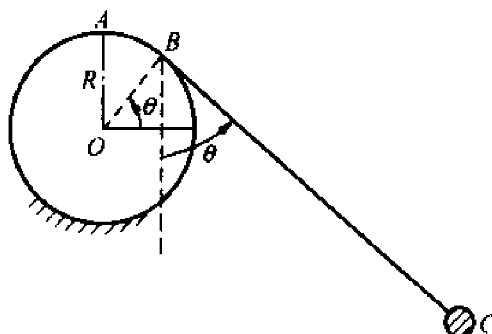
题图 4 - 19

4 - 20 一根长为 l_1、不计质量且不

可伸长的柔绳绕过一个不计质量的定滑轮 A，在其一端挂有质量为 $m_1 = 5\text{kg}$ 的物体，另一端挂着无重动滑轮 B，另一根长为 l_2，不计质量，不可伸长的柔绳绕过滑轮 B，其两端分别挂着质量为 $m_2 = 3\text{kg}$ 和 $m_3 = 2\text{kg}$ 的物体，如题图 4－20 所示，设绳与滑轮间无滑动。用正则方程求解三个物体的运动。



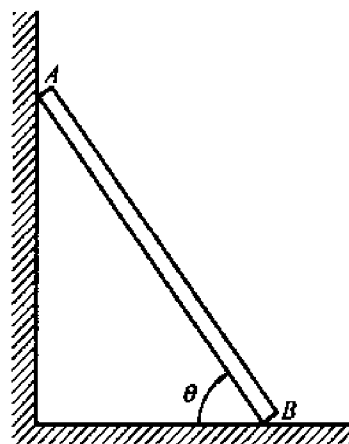
题图 4－20



题图 4－21

4－21　一半径为 R 的圆盘被固定在铅垂平面内，一根长为 $l + \dfrac{R\pi}{2}$ 的不可伸长的轻绳上段绕在圆盘边缘上，上端固定在圆盘最高点 A 上，绳的下端系着质量为 m 的质点，如题图 4－21 所示。用正则方程求质点的运动微分方程，并求其微振动频率。

4－22　长度为 $2l$，质量为 m 的均质直杆 AB，它的上端靠在光滑的铅垂墙上，下端搁在光滑的水平地板上，如题图 4－22 所示。设杆始终在图示平面内运动。杆从 $\theta = \theta_0$ 由无初速度地释放，用正则方程求杆不脱离墙时任一位置时的角速度 ω。

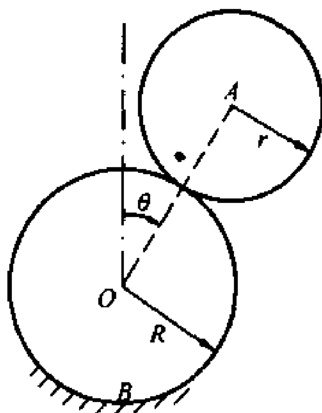


题图 4－22

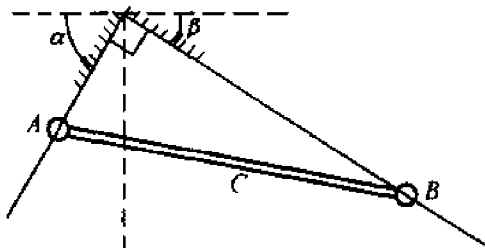
4－23　半径为 r 的均质圆柱体 A，自半径为 R 的固定圆柱体的顶端在重力作用下无滑动地滚下，如题图 4－23 所示。设开始时小圆柱体静止。用正则方程求柱心 A 的加速度（表示成 θ 的函数）。

4－24　质量为 m，长为 $2l$ 的均质杆 AB 被限制在铅垂平面内运动，其两端 A 和 B 只能沿着两根固定的互相垂直的光滑细杆滑动，如题图 4－24 所示。用正则方程求杆在平衡位置附近作微振动的频率。

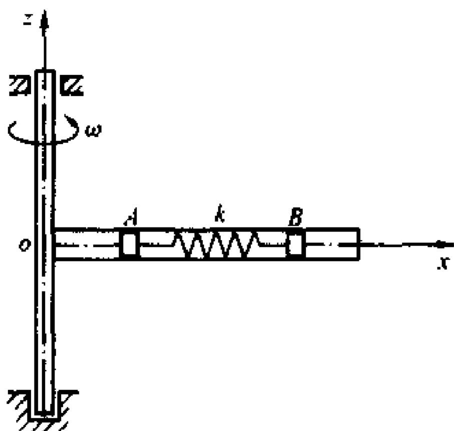
4－25　质量均为 m 的两物块 A、B 用刚性系数为 k 的弹簧系住，放在光滑的水平管子内，此管以匀角速度 ω 绕铅垂轴转动，如题图 4－25 所示。设弹簧的自然长度为 l_0，试建立系统相对运动哈密顿正则方程。



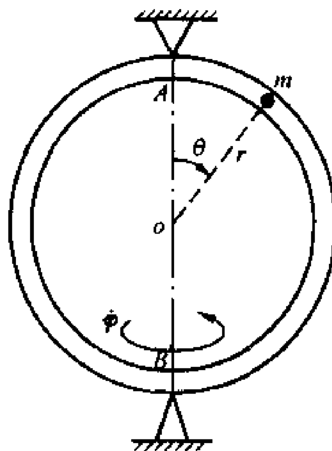
题图 4-23



题图 4-24



题图 4-25



题图 4-26

4-26 一小管弯成为半径为 r 的圆环，它可绕其铅垂直径轴 AB 自由转动，它对该轴的转动惯量为 J。另有一质量为 m 的质点可在管内无摩擦滑动，如题图 4-26 所示。设系统运动的初始条件：$\theta(0)=\frac{\pi}{2}$，$\dot{\theta}(0)=0$，$\dot{\varphi}(0)=2\sqrt{\frac{g}{r}}$，令 $J=mr^2$，试建立系统的正则方程，并求圆环的最大角速度 $\dot{\varphi}_{\max}$。

4-27 试判别下列变换：

$$\begin{cases}Q=\ln(1+\sqrt{q}\cdot\cos p)\\P=2\sqrt{q}(1+\sqrt{q}\cdot\cos p)\sin p\end{cases}$$

是否为一正则变换？

4-28 试判别下列变换：

$$\begin{cases}Q=\sqrt{q^2+p^2}\\P=-\sqrt{q^2+p^2}\tan^{-1}\dfrac{q}{p}\end{cases}$$

是否为一正则变换？

4－29　试判别下列变换：

$$\begin{cases} q = \sqrt{2Q/k}\cos P \\ p = \sqrt{2kQ}\sin P \end{cases} \quad (k \text{ 为常数})$$

是否为一正则变换？

4－30　x 和 y 该当何值，才能使下列变换：

$$\begin{cases} Q = xp \\ P = yq \end{cases}$$

为一正则变换？

4－31　已知一正则变换为

$$Q = \sqrt{q^2 + p^2}$$

$$K = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)\arctan\frac{q}{p} + \frac{1}{2}qp$$

试求函数 $P(q,p)$ 和 $G(q,Q)$。

答：$P = -\sqrt{q^2 + p^2}\arctan\dfrac{q}{p}$

$$G = \frac{Q^2}{2}\arcsin\frac{q}{Q} + \frac{q}{2}\sqrt{Q^2 - q^2}$$

4－32　已知一正则变换的母函数为 $F_1 = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} q_\alpha Q_\alpha$。试求其变换方程。

答：$p_\alpha = Q_\alpha, P_\alpha = -q_\alpha, \widetilde{H} = H_\alpha$

4－33　已知一正则变换方程为 $Q = \sin q, P = \dfrac{p - mv_0}{\cos q}$，试求出生成函数 F_1, F_2, F_3 和 F_4。

答：$F_1 = mv_0 q, F_2 = mv_0 q + P\sin q, F_3 = (mv_0 - p)\arcsin Q$，

$$F_4 = (mv_0 - p)\arccos\frac{p - mv_0}{P} + \sqrt{P^2 - (p - mv_0)^2}$$

4－34　已知一正则变换为 $Q = q\cos^2 2p, K = qp - \dfrac{q}{4}\sin 4p$，试求 $P(q,p)$ 和生成函数 $F_1(q,Q), F_4(p,P)$。

答：$P = \dfrac{1}{2}\tan 2p, F_1 = \dfrac{q}{2}\left[\arccos\sqrt{\dfrac{Q}{q}} - \sqrt{\dfrac{Q(q-Q)}{q}}\right], F_4 = 0$。

4－35　已知体系新的哈密顿函数为 $\widetilde{H} = \dfrac{1}{2}(p^2 + c^2q^2)$，经过正则变换 $q = \sqrt{\dfrac{2Q}{c}}\cos P, p = \sqrt{2cQ}\sin P$ 后，求体系转换为新的正则变量所表达的正则方程。

答：$\dot{Q} = 0, \dot{P} = -c$。

4－36　已知一摆球质量为 m，摆长为 l 的单摆，试应用哈密顿－雅可比方程求出单摆运动方程的积分。

答：$\sqrt{\dfrac{g}{l}}(t - t_0) = \displaystyle\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\dfrac{2E}{mgl} + 2\cos\theta}}$

4 - 37　已知一质点，其质量为 m，在重力场中因重力的作用而铅直下落，所经过的路程以广义坐标 q 表示。试用哈密顿 - 雅可比方程求出质点下落运动的规律。

答：$q = \sqrt{\frac{2E}{m}}(t - t_0) + \frac{g}{2}(t - t_0)^2$

4 - 38　将一端固定在天花板的细绳绕在一半径为 R 质量为 m 的均匀圆盘的边缘浅槽上，由静止开始铅直下落。试应用哈密顿 - 雅可比方法求出圆盘中心的运动规律。

答：$y = \frac{1}{3}gt^2$

4 - 39　已知一质量为 m 半径为 R 的圆柱体，沿倾角为 θ 的粗糙斜面自由下滚。试应用哈密顿 - 雅可比方法求出该圆柱体质心运动的加速度。

答：$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\theta$

5　力学的变分原理

力学的变分原理是古典力学发展到成熟阶段的产物，它对力学的进一步发展起了非常重要的作用。为了搞清原理一词的含义，我们有必要对定律、定理及原理的含义分别加以阐述。

定律 — 对物理现象进行观察、实验，在积累了大量事实和实验结果的基础上经过归纳、概括而得到的一门科学的基本规律。如理论力学中的牛顿三定律。

定理 — 从基本定律出发，由数学演绎和逻辑推理而得到的进一步反映事物间的内在联系的数学关系表达式。如动量定理、动量矩定理、动能定量等。其应用范围是局部的。

原理 — 也是由基本定律出发，经过数学演绎和逻辑推理而得到的命题。其不同于定理之处在于：原理具有高度的概括性，在这一点上，原理可以认为与基本定律等价。

原理特别是变分原理的正确性往往不易由实践直接检验，但可由它所得到的方程及方程的解和实践相比较来间接检验其正确性。

力学的变分原理是在基本定律基础上用变分法得到的。变分原理的特征在于它只是提供了一种准则，根据这种准则可以把在相同条件下系统的真实运动与约束所允许的一切可能运动区分出来，从而可以找到系统的真实运动。

力学的变分原理可分为两大类：

1. 微分形式的变分原理。它研究任一瞬时区分真实运动与可能运动的准则。如前面讲过的动力学普遍方程。

2. 积分形式的变分原理。它研究在任一有限时间历程中区分真实运动与可能运动的准则。如我们下面就要讲到的 Hamilton 原理。

5.1　变分原理概述

5.1.1　变分的概念及其计算准则

1. 等时变更

设系统只有一个自由度，它的运动可用一个广义坐标来表示。$q = q(t)$ 称为真实运动，由于 t 的变化 $\mathrm{d}t$，引起坐标的变化叫做微分，如图 5 - 1 所示。

$$\mathrm{d}q = \dot{q}\,\mathrm{d}t \qquad (5-1)$$

上述变化 $\mathrm{d}q$ 是因变数本身的变化，即 t 的变化而引起的 q 的变化，显然这种变化是和真实运动相符合的。现在来考虑另一种变化，如果将变数时间 t 固定，而给函数本身一个微小的变更，如图 5 - 1 所示。ε 是任意小的常数，$\eta(t)$ 是可微的时间函数

$$\bar{q}(t) = q(t) + \varepsilon\eta(t) \qquad (5-2)$$

$\bar{q}$ 是和 q 无限靠近的新曲线，也是系统的一个运动，即可能运动，通常也称为可取函数。显然有

5.1.3 古典变分法的简单问题

将捷线问题一般化，就可提出古典变分法的最简单的问题：

在给定端点条件

$$q(t_0)=q_0 \qquad q(t_1)=q_1 \tag{5-11}$$

下寻求使定义在函数$\{q(t)\}$族上的泛函数$J[q(t)]$即

$$J[q(t)]=\int_0^{t_1}F(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t \tag{5-12}$$

取得极值得的解函数$q(t)$。

现在我们假设在上述条件下存在解函数，并设该解函数为$q=\bar{q}(t)$。另取满足端点条件：

$$\eta(t_0)=0 \qquad \eta(t)=0 \tag{5-13}$$

的函数$\eta(t)$与任意实数ε，若令

$$q_\varepsilon(t)=\bar{q}(t)+\varepsilon\eta(t) \tag{5-14}$$

显然对于所有满足(5-13)式的$\eta(t)$都能使$q_\varepsilon(t)$满足(5-11)式，我们称$q_\varepsilon(t)$为“可取函数”。若将$q=q_\varepsilon(t)$代入(5-12)式，则$J[q_\varepsilon(t)]$就成为ε的函数，即$J[q_\varepsilon(t)]$成为一个变量ε的函数，所以泛函的驻值问题就变成了函数的驻值问题。故依照假设它在$\varepsilon=0$应该取驻值，故必下式成立。

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[q_\varepsilon]\right)_{\varepsilon=0}=0 \tag{5-15}$$

将上式展开，并利用依赖于参数的定积分求导法则，可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[q_\varepsilon]\right)_{\varepsilon=0}=\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_0^{t_1}F[\bar{q}(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{\bar{q}}(t)+\varepsilon\,\dot{\eta}(t),t]\mathrm{d}t\right)_{\varepsilon=0}=$$

$$\int_0^{t_1}[F_q\eta(t)+F_{\dot{q}}\,\dot{\eta}(t)]\mathrm{d}t=0 \tag{5-16}$$

对上式中的第二项应用分部积分法可有

$$\int_0^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right]\eta(t)\mathrm{d}t+F_{\dot{q}}\,\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0 \tag{5-17}$$

即

$$\int_0^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right]\eta(t)\mathrm{d}t=0 \tag{5-18}$$

由此得出结论：驻值曲线$q=\bar{q}(t)$必须满足微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}=0 \tag{5-19}$$

而此微分方程满足条件(5-11)的解就是泛函(5-12)的上述驻值问题的解，方程(5-19)称为上述泛函问题的 Euler 微分方程。

再由(5-18)式导出(5-19)式时，应用了所谓变分法的基本引理：

设有连续函数$f(t)$，它对于满足边界条件(5-13)下的任意具连续导数的函数$\eta(x)$如果有

$$\int_0^{t_1}f(t)\eta(t)=0 \tag{5-20}$$

则必有 $f(t) \equiv 0$。这是因为如果在某点 t_m 处 $f(t_m) \neq 0$ 例如 $f(t_m) > 0$，则由它的连续性在 t_m 的某邻域内应有 $f(t) > 0$，因此选取一个在此邻域内为正而在其外恒为零的连续可微函数 $\eta(t)$ 则必使上式的左端为正而与假设矛盾。

5.1.4 求变分法则

由 $q_\epsilon(t) = \bar{q}(t) + \epsilon\eta(t)$ 在端点条件 $\eta(t_0) = 0 \quad \eta(t) = 0$ 时有

$$t = t_0 \quad \delta q = 0 \quad t = t_1 \quad \delta q = 0 \tag{5-21}$$

将 $\left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}J[q_\epsilon]\right)_{\epsilon=0} = \int_0^{t_1}[F_q\eta(t) + F_{\dot{q}}\ \dot{\eta}(t)]\mathrm{d}t = 0$ 两端乘以 ϵ，并记泛函的一阶变分为

$$\delta J = \epsilon\left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}J[q_\epsilon]\right)_{\epsilon=0} = \int_0^{t_1}[F_q\epsilon\eta(t) + F_{\dot{q}}\epsilon\ \dot{\eta}(t)]\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right]\mathrm{d}t = \int_0^{t_1}\delta F\mathrm{d}t = 0 \tag{5-22}$$

或

$$\delta\int_0^{t_1}F\mathrm{d}t = \int_0^{t_1}\delta F\mathrm{d}t = 0 \tag{5-23}$$

该式表明，泛函 J 在端点条件下存在驻值的条件是泛函的一阶变分等于零。同时上式即为泛函 J 求变分的法则，即变分运算可从积分号外移至积分号内，或积分变分运算或互相交换。这个原则的前提条件是等时变分。

由于泛函数变分法则简便易行，故在今后的讨论中都采用泛函变分法则来处理泛函的驻值问题。

对于依赖于多个独立变化函数的泛函

$$J(q_1, q_2, \cdots, q_n) = \int_0^{t_1}F(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t)\mathrm{d}t \tag{5-24}$$

在固定端点条件

$$q_1(t_0) = q_1^0, q_2(t_0) = q_2^0, \cdots, q_n(t_0) = q_n^0$$

$$q_1(t_1) = q_1^1, q_2(t_1) = q_2^1, \cdots, q_n(t_1) = q_n^1 \tag{5-25}$$

下的驻值问题可仿照上述方法求 J 的一阶变分，并令一阶变分为零，即

$$\delta J = \int_0^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{5-26}$$

上述端点条件的变分可表示为

$$t = t_0, \delta q_1 = \delta q_2 = \cdots = \delta q_n$$

$$t = t_1, \delta q_1 = \delta q_2 = \cdots = \delta q_n \tag{5-27}$$

对上式进行分部积分，并利用 $q_i(t)$ 的 $d-\delta$ 交换关系及端点条件，可得

$$\delta J = \int_0^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\mathrm{d}t = 0 \tag{5-28}$$

由于 δq_i 是相互独立的，当上式成立时必有

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5-29}$$

这就是依赖于多个函数的泛函在固定端点条件下存在驻值的条件，它们构成了一组

Euler 微分方程组。

5.2 Hamilton 原理

一个具有 S 个自由度的质点系，在 $t = t_0$ 时，系统的位形可以多维空间中的点 A 来表示。而在 $t = t_1$ 时，系统的位形由 B 点表示。由时刻 t_0 到 t_1，也就是 $t_1 - t_0$ 这一段时间间隔内，质点系可以通过约束所允许的轨迹(或路径)由 A 运动到 B。这些轨道不仅仅是一条而可以是多条，但其中只有一条是系统运动的真正的轨迹，如图 5 - 3 所示的 ACB，我们将其称为正路，而其余的只是可能的轨迹，我们将其称之为旁路，如 ADB，AEB 等。不论正路或旁路都必须通过两固定点 A 和 B。那么真正的运动(正路)和可能的运动(旁路)到底有什么区别，用什么准则来判别。哈密顿原理给出了关于这一问题的准则。

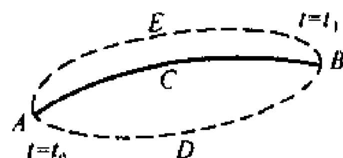


图 5 - 3

5.2.1　完整有势系统的 Hamilton 原理

哈密顿原理：由 A 到 B 的真正路径是使 $S = \int_0^{t_1} L\mathrm{d}t$ 为驻值，即 S 的一阶变分等于零。$\delta S = 0$，上式中 S 称为哈密顿作用量，上述原理表明，真正运动和可能运动的区别是真实运动是哈密顿作用量的驻值。

现证明如下：

由 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{2 - 24}$$

将上式每一方程乘上对应的广义坐标的变分 δq_j 并相加后得到

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j\right] = 0 \tag{5 - 30}$$

在上式中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right]\cdot\delta q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \tag{5 - 31}$$

将其代入(2 - 24)式有

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j\right] = 0 \tag{5 - 32}$$

上式可写为

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)\right] = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j = \delta L \tag{5 - 33}$$

将上式进行积分,积分从 t_0 到 t_1

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right\}\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} = \int_0^{t_1}\delta L\,dt \tag{5-34}$$

因为 A、B 两点固定,所有正路和旁路都交于 A、B 两点,故 A、B 两点的变分均为零。有上式左边为零,因此有

$$\int_0^{t_1}\delta L\,dt = \delta\int_0^{t_1}L\,dt = 0 \tag{5-35}$$

证毕。

5.2.2 完整非有势系统的 Hamilton 原理

实际上保守系统的 Hamilton 原理也可由动力学的普遍方程推得,下面我们应用动力学的普遍方程来推导非保守系统的 Hamilton 原理,同时也可得到保守系统的 Hamilton 原理。

动力学的普遍方程为

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2-4}$$

式中 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1,\cdots,q_n,t)$

式(2-4)中

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n}Q_j\cdot\delta q_j = \delta w \tag{5-36}$$

为主动力的虚功。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)-\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = \\ &\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)-\delta\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\Big)= \\ &\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)-\delta T\end{aligned} \tag{5-37}$$

将式(5-36)、(5-37)代入式(2-4)并在时段 $t_0\to t_1$ 上对时间积分可得

$$\int_0^{t_1}\Big[\delta T + \delta w - \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)\Big]dt = 0 \tag{5-38}$$

式(5-38)中的第三项积分为

$$\int_0^{t_1}\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)dt = \sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{5-39}$$

由于系统在始末位置的变分为零,即

$$\delta\boldsymbol{r}_i(t_0) = 0,\delta\boldsymbol{r}_i(t_1) = 0 \tag{5-40}$$

故上式的积分应为零。所以式(5-38)成为

$$\int_0^{t_1}(\delta T + \delta w)dt = 0 \tag{5-41}$$

此式即为非保守系统的哈密顿原理。

式(5-41)也可写成

$$\int_0^{t_1}\Big(\delta T + \sum_{j=1}^{n}Q_j\delta q_j\Big)dt = 0 \tag{5-42}$$

$$\varepsilon\left(3\cos 3\sqrt{\frac{g}{l}}t+\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\Big]\mathrm{d}t=$$

$$\frac{3}{2}mgl\varphi_0^2\varepsilon^2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}>0$$

所以 $\tilde{S}>S$

例 5－2 平面摆，摆锤质量为 m_1，摆杆杆长为 l，视为均质直杆，挂于支点 C 处，可在铅垂平面内摆动，另一质量为 m_2 的小球，光滑地套在摆杆上，它既可以沿摆杆自由滑动，又可以沿半径为 R 的固定圆柱形槽内滑动，如图 5－5 所示。摩擦不计。试用哈密顿原理写出系统的运动微分方程。

解 系统具有一个自由度，选取 φ 为广义坐标。系统的动能为

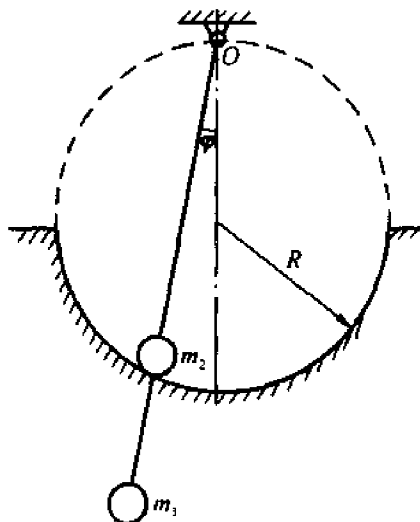


图 5－5

$$T=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_3l^2\varphi^2$$

因

$$r=2R\cos\varphi$$

$$\dot{r}=-2R\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

所以

$$T=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\varphi}^2+2m_2R^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{6}m_3l^2\dot{\varphi}^2$$

取 O 点处为重力的零势能位，系统的势能为

$$V=-\left(\frac{1}{2}m_3gl\cos\varphi-m_1gl\cos\varphi+m_2g2R\cos^2\varphi\right)$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\varphi}^2+2m_2R^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{6}m_3l^2\dot{\varphi}^2+$$

$$\left(\frac{1}{2}m_3gl\cos\varphi+m_1gl\cos\varphi+2m_2gR\cos^2\varphi\right)$$

由哈密顿原理，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[\left(\frac{1}{2}m_1l^2+2m_2R^2+\frac{1}{6}m_3l^2\right)\cdot 2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}-$$

$$\left(\frac{1}{2}m_3gl\sin\varphi+m_1gl\sin\varphi+2m_2gR\sin2\varphi\right)\delta\varphi\Big]\mathrm{d}t=0$$

而

$$\int_{t_1}^{t_2}\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\varphi)\mathrm{d}t=\dot{\varphi}\delta\varphi\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\varphi}\,\delta\varphi\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\varphi}\,\delta\varphi\mathrm{d}t$$

则有

$$\int_{t_1}^{t_2}-\Big[\Big((m_1l^2+4m_2R^2+\frac{1}{3}m_3l^2\Big)\ddot{\varphi}+$$

$$\left(\frac{1}{2}m_3gl\sin\varphi+m_1gl\sin\varphi+2m_2gR\sin2\varphi\right]\delta\varphi\mathrm{d}t=0$$

由于 $\delta\varphi$ 为独立变分，故得

$$\left(m_1 l^2 + 4m_2 R^2 + \frac{1}{3}m_3 l^2\right)\ddot{\varphi} + \frac{2m_1 + m_3}{2}gl\sin\varphi + 2m_2 gR\sin 2\varphi = 0$$

这就是所求的系统的运动微分方程。

例5－3 设一圆轮在水平面内绕固定中心轴 O 转动，一质量为 m 的滑块套在轮的轮幅上，用弹簧与轴心相连。如图 5－6 所示，若轮对 O 的转动惯量为 J_0，弹簧的刚度系数为 c，其自然长度为 l，各处摩擦不计。试用哈密顿原理求系统的运动微分方程。

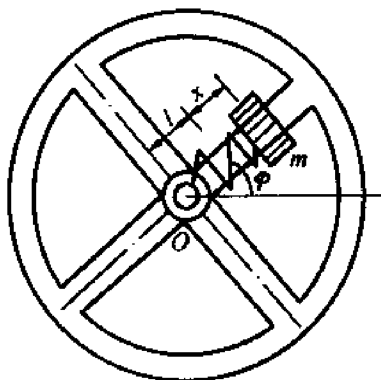


图 5－6

解 系统有两个自由度，选圆轮转角 φ 和滑块坐标 x 为广义坐标。

系统动能 $T = \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\varphi}^2] =$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}[J_0 + m(l+x)^2]\dot{\varphi}^2$$

系统势能 $V = \frac{c}{2}x^2$

拉格朗日函数 $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}[J_0 + m(l+x)^2]\dot{\varphi}^2 - \frac{c}{2}x^2$

由哈密顿原理，对于系统的真实运动，应有

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = 0，即 \quad \int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t = 0$$

故得

$$\int_{t_1}^{t_2}\{m\dot{x}\delta\dot{x} + [J_0 + m(l+x)^2]\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} + m(l+x)\dot{\varphi}^2\delta x - cx\delta x\}\mathrm{d}t = 0 \tag{a}$$

因 $\delta\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x$，故

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta\dot{x}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\,\mathrm{d}\delta x = m\dot{x}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta x m\ddot{x}\,\mathrm{d}t$$

考虑到 $\delta x\Big|_{t_1} = \delta x\Big|_{t_2} = 0$

上式得 $$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta\dot{x}\,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2}\delta x m\ddot{x}\,\mathrm{d}t \tag{b}$$

同样

$$\int_{t_1}^{t_2}[J_0 + m(l+x)^2]\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}[J_0 + m(l+x)^2]\dot{\varphi}\mathrm{d}\delta\varphi =$$

$$[J_0 + m(l+x)^2]\dot{\varphi}\delta\varphi\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta\varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J_0\dot{\varphi} + m(l+x)^2\dot{\varphi}]\mathrm{d}t =$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J_0\dot{\varphi} + m(l+x)^2\dot{\varphi}]\delta\varphi\delta t \tag{c}$$

将(b)、(c)代入(a)后得

连，滑块 B 受到粘性阻尼为$F = b\dot{x}$ 的作用。小车平动，其运动方程为 $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$，如图 5－8 所示。试应用哈密顿原理写出滑块 B 的运动微分方程。

解　由于阻尼力的存在，该系统为非保守系统。且由于 s 已知，故系统仅有一个自由度，设广义坐标为 x。

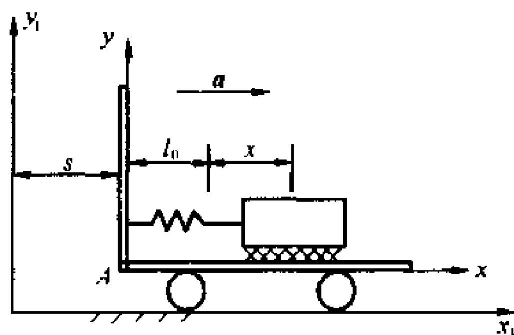


图 5－8

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{s} + \dot{x})^2 = \frac{1}{2}m(v_0 + at + \dot{x})^2$$

对应于广义坐标的广义力为

$$Q_x = -kx - b\dot{x}$$

代人非保守系统的哈密顿原理$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j)\mathrm{d}t = 0$ 有

$$\int_{t_0}^{t_1}[m(v_0 + at + \dot{x})\delta\dot{x} + (-kx - b\dot{x})\delta x]\mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

对上式中的第一项进行分部积分有

$$\int_{t_0}^{t_1},[m(v_0 + at + \dot{x})\delta\dot{x}] =$$

$$m(v_0 + at + \dot{x})\delta x\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m(a + \ddot{x})\delta x\mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t_1} m(a + \ddot{x})\delta x\mathrm{d}t \tag{2}$$

将式(2) 代入式(1) 得

$$\int_{t_0}^{t_1}[m(at + \ddot{x}) + kx + b\dot{x}]\delta x\mathrm{d}t = 0$$

由于 $\delta x \neq 0$ 可得运动微分方程为

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + ma = 0$$

例 5－6　一弹性梁上作用有分布载荷 $p = p(x,t)$，在 $x = 0$ 处作用有剪力 Q_0 及弯矩 M_0，在 $x = l$ 处作用有剪力Q_l 及弯矩M_l 如图 5－9 所示，试用哈密顿变分原理建立梁的运动微分方程及其相应的边界条件。

解　该问题属连续体系问题，$Q_0, M_0, Q_l, M_l, p(x,t)$ 均为非有势力。设梁的挠度曲线为 $w(x,t)$，t 时刻各点的无限小位移设为 $\delta w(x,t)$，另外两端的无限小位移及无限小转

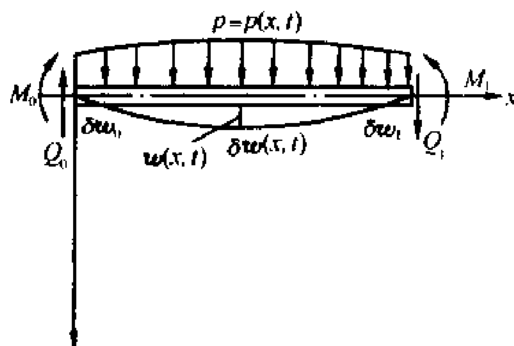


图 5-9

角设为 $\delta w_0, \delta w_l, \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0, \delta\left(\frac{\partial w}{\partial l}\right)_l$

梁的动能为

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x$$

由简单梁理论可知梁的势能为

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x$$

由完整非有势系统的拉格朗日方程有

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[-Q_0\delta w_0 + Q_l\delta w_l + M_0\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 - M_l\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_l\right]\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(x,t)\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_0^l \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x - \int_0^l \frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = 0 \qquad (1)$$

对上式进行变分运算有

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^l\int_{t_0}^{t_1}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta w)\mathrm{d}t\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^l \rho\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\mathrm{d}t\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\mathrm{d}t\mathrm{d}x \qquad (2)$$

上式中利用了 $t = t_0$ 时 $\delta w = 0$, $t = t_1$ 时 $\delta w = 0$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_0^l - \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0^l - \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_0^l - \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\delta w\Big|_0^l \mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w \mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (3)$$

将式(2)(3)代入式(1)有

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p\right]\delta w \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[-Q_0 - \frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0\right]\delta w_0 +\right.$$

$$\left[Q_l + \frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_l\right]\delta w_l + \left[M_0 + \left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 +$$

$$\left.\left[-M_l - \left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_l\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_l\right\}\mathrm{d}t = 0$$

上式中虚位移 $\delta w, \delta w_0, \delta w_l$ 和虚转角 $\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0, \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_l$ 都是互不相关的变分，故各自前面的系数必须分别为零，这样得运动方程为

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0$$

边界条件为

$$-Q_0 - \frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big|_{x=0} = 0$$

$$Q_l + \frac{\partial}{\partial x}\left(EJ + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big|_{x=l} = 0$$

$$M_0 + \left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big|_{x=0} = 0$$

$$-\left(M_l + EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=l}\right) = 0$$

由上例可见，哈密顿原理是一普遍原理，运用该原理可建立动力学方程及其相应的边界条件。应该指出对于较为复杂的边界条件，应用该原理可完整无误地给出，而且不会弄错符号和应包含的项，这正是分析力学的优点，因此在变形体动力学中也经常用到哈密顿原理。

5.3 微分变分原理

5.3.1 非完整约束条件下虚位移的定义

在第一章中，我们介绍了完整约束及一阶线性非完整约束条件下的虚位移。完整约束及一阶线性非完整约束方程为

$$f_a(x,t) = 0 \qquad (a = 1,2,\cdots,l) \qquad (1-1)$$

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{\beta s}\dot{x}_s + A_\beta = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (1-5)$$

对于非完整约束式(1－5)也可写为一般形式

$$f_\beta(x,\dot{x},t) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (1-2)$$

我们曾定义虚位移为在时刻系统自同一位形出发所发生的任何两个可能位移之差，并记作 δx_s，对式(1－2)如果我们求对位移的一阶变分，则有

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_s}\delta x_s = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{5-46}$$

这是约束对位移变分的限制，也就是虚位移 δx 所应满足的方程。同样我们可考虑约束对速度变分的限制有

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{x}_s}\delta \dot{x}_s = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{5-47}$$

前面我们讲过在给定时刻，给定位移情况下，任一组满足约束方程的速度 $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_{3N}$ 称为系统的可能速度，式(5－47)中速度变分 $\delta\dot{x}_s$ 实际上是任两组无限接近的可能速度之差，或是可能速度的微变更。由于 δx_s 可称为位移空间的虚位移，这样 $\delta\dot{x}_s$ 也可被称为速度空间的虚位移或一阶导数空间的虚位移，实际上这是完全可以的；若将式(5－47)乘以无限小时间 $\mathrm{d}t$，有

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{x}_s}\delta \dot{x}_s \mathrm{d}t \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{5-48}$$

上式中考虑 $\dot{x}_s\mathrm{d}t$ 应为 δx_s，故有

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{x}_s}\delta x_s = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{5-49}$$

比较式(5－47)和式(5－49)可以看出除记号 δx_s 和 $\delta\dot{x}_s$ 不同外，其它都相同；换句话说，即 δx_s 和 $\delta\dot{x}_s$ 都应满足同样的约束条件。所以我们可以将 $\delta\dot{x}_s$ 称为速度空间的虚位移或一阶导数空间的虚位移。

同样如果将式(1－2)对时间 t 求导，可得

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_s}\dot{x}_s + \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{x}_s}\ddot{x}_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial t} = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{5-50}$$

这是一组含有 $x_s,\dot{x}_s,\ddot{x}_s,t$ 变量的约束方程，我们定义凡在给定时刻，给定位形，给定速度情况下，任一组满足式(5－50)的加速度 $\ddot{x}_1,\ddot{x}_2,\cdots,\ddot{x}_{3N}$ 称为系统的可能加速度。同样记 $\delta\ddot{x}_s$ 为可能加速度的变更，则由式(5－50)有

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{x}_s}\delta \ddot{x}_s = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{5-51}$$

同样我们可以将 $\delta\ddot{x}_s$ 称为加速度空间的虚位移或二阶导数空间的虚位移。

5.3.2　高阶约束

当系统受以下形式的任意 m 阶非完整约束

$$f_\beta(x,\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(m)},t) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{5-52}$$

时，是指约束仅是对坐标的最高阶导数 $x_s^{(m)}$ 的限制，因此，在给定 $x,\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(m-1)}$ 的前提下，约束对 $x_s^{(m)}$ 变更 $\delta x_s^{(m)}$ 的限制应为

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_s^{(m)}}\delta x_s^{(m)} = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{5-53}$$

同样我们将 $\delta x_i^{(m)}$ 称为 m 阶导数空间的虚位移。

为了说明 m 阶导数空间虚位移的实质,我们将可能位移记作 $\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}x'$,并按无限小时间 $\mathrm{d}t$ 展开,只保留到 $(\mathrm{d}t)^m$ 项,有

$$\mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\ddot{x}(\mathrm{d}t)^2 + \cdots + \frac{(\mathrm{d}t)^{m-1}}{(m-1)!}x^{(m-1)} + \frac{(\mathrm{d}t)^m}{m!}x^{(m)} \qquad (5-54)$$

$$\mathrm{d}x' = \dot{x}'\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\ddot{x}'(\mathrm{d}t)^2 + \cdots + \frac{(\mathrm{d}t)^{m-1}}{(m-1)!}x'^{(m-1)} + \frac{(\mathrm{d}t)^m}{m!}x'^{(m)} \qquad (5-55)$$

考虑到在给定 $x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(m-1)}$ 及 $\mathrm{d}t$,但 $x^{(m)}$ 可变的前提下展开,由虚位移等于无限小可能位移之差,有

$$\delta x = \mathrm{d}x' - \mathrm{d}x = \frac{(\mathrm{d}t)^m}{m!}(x'^{(m)} - x^{(m)}) = \frac{(\mathrm{d}t)^m}{m!}\delta x^{(m)} \qquad (5-56)$$

上式表明 m 阶导数空间规定的虚位移概念确是我们熟知的虚位移的概念。

5.3.3 迈哲隆(Mangeron)原理

在第一章中,我们介绍过动力学的普遍方程(又称 d'Alembert - Lagrange 原理)

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (2-4)$$

原理除理想约束外不需任何其它假设,至于虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 则要求是符合约束条件的无限小位移。上一节中我们给出了任意 m 阶约束条件下虚位移的定义,这样就可以给出和各阶约束相适应的更具体化的微分原理,即 Mangeron 原理:

如果系统受有不高于 m 阶的非完整约束,可以取虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i^{(m)}$ 为 m 阶导数空间的虚位移,即有以下限制条件

$$\delta t = 0, \delta\boldsymbol{r}_i = \delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = \cdots = \delta\boldsymbol{r}_i^{(m-1)} = 0 \qquad (5-57)$$

而 $\delta\boldsymbol{r}_i^{(m)}$ 不全为零,因之,在不考虑无关紧要的常数的情况下,可用 $\delta\boldsymbol{r}_i^{(m)}$ 代替式(2-4)中的 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 有

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i^{(m)} = 0 \qquad (5-58)$$

这便是Mangeron原理,也称为万有 d'Alembert 原理,“万有”是指它包括了约束的各种情况,从 $m=0$(完整约束)直到任 m 阶约束都普遍有效。

5.3.4 若丹(Jourdain)原理

如果系统受有不高于一阶的约束(完整约束、一阶线性或非线性非完整约束),则可取一阶导数空间所规定的虚位移

$$\delta t = 0, \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (5-59)$$

但 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 不全为零的限制条件下的虚位移,因此,在Mangeron原理中令 $m=1$ 便得到Jourdain原理:

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (5-60)$$

已经发现的非完整约束大多数是一阶的,因此 Jourdain 原理在非完整系统动力学中有

$$G=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2 \tag{5-71}$$

式中 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 表示在约束条件下的可能加速度，而$\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}$表示在不受约束条件下，作为自由质点系的加速度，二者之差则表示在约束条件下可能运动对自由运动的加速度偏离，函数 G 则表明加权 m_i 后的加速度总平方偏离。Gauss 原理的实质就是这个加权总平方差对真实运动应取极小值。

式(5－71)可表达成投影形式

$$G=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\left(\ddot{x}_i-\frac{F_{ix}}{m_i}\right)^2+m_i\left(\ddot{y}_i-\frac{F_{iy}}{m_i}\right)^2+m_i\left(\ddot{z}_i-\frac{F_{iz}}{m_i}\right)^2\right] \tag{5-72}$$

这样 Gauss 原理可写成

$$\sum_{i=1}^{N}[(F_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i+(F_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta\ddot{y}_i+(F_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i]=0 \tag{5-73}$$

或

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta\boldsymbol{a}_i=0 \tag{5-74}$$

式(5－73)及式(5－74)与动力学普遍方程在公式上有相似之处，只是以 $\delta\boldsymbol{a}_i$ 代替了动力学普遍方程中的 $\delta\boldsymbol{r}_i$，故有人称为动力学普遍方程第三种基本开式。

对于自由质点系，则所有 $\delta\ddot{x}_i,\delta\ddot{y}_i,\delta\ddot{z}_i$ 都是独立的，从式(5－73)可得

$$\begin{aligned}m_i\ddot{x}_i&=F_{ix}\qquad i=1,2,\cdots,n\\m_i\ddot{y}_i&=F_{iy}\qquad i=1,2,\cdots,n\\m_i\ddot{z}_i&=F_{iz}\qquad i=1,2,\cdots,n\end{aligned} \tag{5-75}$$

这是从高斯最小拘束原理导出的自由质点系运动微分方程。

以上的公式推导中用到的是直角坐标，同样通过直角坐标和广义坐标变换式

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t) \tag{1-15}$$

可以得到以广义坐标表示的 Gauss 原理。对于完整系统而言，不但 δq_j 之间是相互独立的，而且 $\delta\dot{q}_j$ 之间及 $\delta\ddot{q}_j$ 之间也是相互独立的，所以如果 Gauss 拘束函数通过变换表示为广义坐标的形式

$$G=G(q,\dot{q},\ddot{q},t) \tag{5-76}$$

则由于对约束 Gauss 拘束函数 G 的变分，只是对加速度取变分，且对于完整系统广义坐标空间内 $\delta\ddot{q}_j$ 之间是相互独立的，则广义坐标空间内的 Gauss 最小拘束原理可写为

$$\frac{\partial G}{\partial\ddot{q}_j}=0\qquad(j=1,2,\cdots,n) \tag{5-77}$$

例 5－7 如图 5－10 所示系统，质量分别为 m_1 和 m_2(设 $m_1>m_2$)两物块用一不可伸长的柔绳连结，柔绳跨在不计质量的光滑的定滑轮上。求两物块的加速度。

解 加速度取铅垂向下为正，则系统的拘束量为

$$G=\frac{1}{2}\left[m_1\left(a-\frac{m_1g}{m_1}\right)^2+m_2\left(-a-\frac{m_2g}{m_2}\right)^2\right]=$$

$$\frac{1}{2}[m_1(a-g)^2+m_2(-a-g)^2]$$

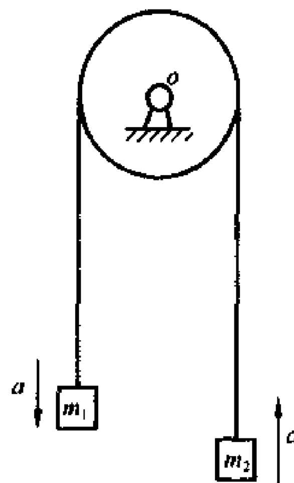


图 5 - 10

由 Gauss 拘速最小原理,有

$$\delta G=\frac{\partial G}{\partial a}\delta a=0$$

即

$$\frac{\partial G}{\partial a}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial a}=m_1(a-g)-m_2(-a-g)=0$$

所以

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

例 5 - 8 如图 5 - 11 所示用无重直杆连结两个质点,其质量分别是 m_1 和 m_2,杆长为 l,安放在倾角为 α 的光滑斜面上,试用高斯最小拘束原理建立系统的运动微分方程。

解 取质心坐标 x 和 y,杆与 x 轴之夹角 φ 作为广义坐标,则两点的坐标应是

$$x_1=x+\lambda_1\cos\varphi$$
$$y_1=y-\lambda_1\sin\varphi$$
$$x_2=x-\lambda_2\cos\varphi$$
$$y_2=y+\lambda_2\sin\varphi \qquad (1)$$

式中系数

$$\lambda_1=\frac{m_2l}{m_1+m_2},\lambda_2=\frac{m_1l}{m_1+m_2} \qquad (2)$$

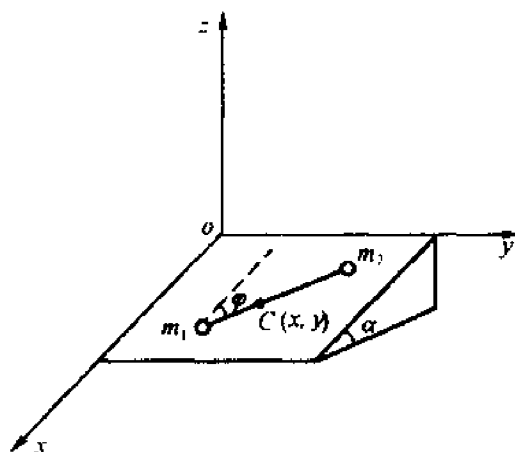


图 5 - 11

设想解除全部约束,两质点自由运动的加速度就是各自的重力加速度,因此,有

$$\ddot{x}_1=g\sin\alpha,\ddot{y}_1=0,\ddot{z}_1=-g\cos\alpha$$
$$\ddot{x}_2=g\sin\alpha,\ddot{y}_2=0,\ddot{z}_2=-g\cos\alpha \qquad (3)$$

两质点被约束在斜面上运动时的可能加速度的投影值,应由方程(1) 两边对时间求导,得

$$\ddot{x}_1=\ddot{x}-\lambda_2(\sin\varphi\ddot{\varphi}+\cos\varphi\dot{\varphi}^2)$$
$$\ddot{x}_2=\ddot{x}+\lambda_2(\sin\varphi\ddot{\varphi}+\cos\varphi\dot{\varphi}^2)$$
$$\ddot{y}_1=\ddot{y}+\lambda_1(-\cos\varphi\ddot{\varphi}+\sin\varphi\dot{\varphi}^2)$$
$$\ddot{y}_2=\ddot{y}-\lambda_2(-\cos\varphi\ddot{\varphi}+\sin\varphi\dot{\varphi}^2) \qquad (4)$$

还有条件

$$\ddot{z}_1=0$$

5.4 基于变分原理的直接解法

各种变分原理之所以能成为力学的基本原理，就在于由它们都能导出系统运动方程，这就是它们的重要应用之一，除此之外，这些原理还能提供动力学问题的直接解法。所谓直接解法就是不依赖于运动微分方程的积分而直接利用变分原理本身以求得近似解，这种直接解法有十分重要的意义，因为运动微分方程（如 Lagrange 方程）常常是非线性的方程组，要找出它的有限形式的准确解是十分困难的，甚至是不可能的。我们以前讨论过利用首次积分（如广义能量积分及循环积分）求解，以及其他积分方法（如 Hamilton-Jacobi 方法）也只在一定条件下适用，而且只有少数情况可以求出具体解，因而都有一定程度的局限性。因之需要另辟蹊径，寻求不依赖于积分运动微分方程的直接解法。首次利用变分原理提出直接解法的是 Ritz（1908 年），随后 Galerkin（1915 年）提出了更为一般性的变分解法，这些方法最初只在弹性静力学中得到应用，随后被推广到弹性体的自由振动问题中。至于针对离散系统并给予动力学变分原理的直接解法，只是最近二十年来才受到重视，并得到一些有意义的结果。下面分别介绍一些有代表性的直接解法。

5.4.1 基于 Hamilton 原理的直接解法

由 Hamiton 原理可知，在完整保守系统中对于所有满足端点条件

$$\left.\begin{aligned} q_j(t_0) &= q_{j0} \\ q_j(t_1) &= q_{j1} \end{aligned}\right\} \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{5-78}$$

的可能运动而言，真实运动应使泛函

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t \tag{5-79}$$

取驻值，或真实运动应满足

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\mathrm{d}t = 0 \tag{5-80}$$

现在我们取以下形式的近似解作为可能运动

$$q_j = a_{j1}\varphi_{j1}(t) + a_{j2}\varphi_{j2}(t) + \cdots + a_{jm}\varphi_{jm}(t) = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\varphi_{jk}(t) \quad (j = 1,\cdots,n) \tag{5-81}$$

其中 $\varphi_{jk}(t)$ 称为试探函数或可取函数，它们可事先选定，但需使端点条件(5－78)能自动满足，参数 a_{jk} 为可变的待定参数，给 a_{jk} 以不同值，就得到不同的可能运动，当作为可能运动的近似解代入泛函 S 的表达式(5－79)中时，S 就成为含有 $m\times n$ 个变量 a_{jk} 的函数，S 的驻值条件就归结为

$$\frac{\partial S}{\partial a_{jk}} = 0 \quad \begin{cases} j = 1,\cdots,n \\ k = 1,\cdots,m \end{cases} \tag{5-82}$$

这是含有 $m\times n$ 个未知量的代数方程组。一般说来，这是非线性代数方程组，在特殊情况下是线性方程组。将这个方程组的解 a_{jk} 代入(5－81)式中，就得到满足端点条件(5－78)的近似解。以上所说的不过是变分法中的 Ritz 法在动力学系统中的具体应用，实质上是将泛函驻

$$\delta \dot{q} = (1-3t^2)\delta\alpha + (3t^2-5t^4)\delta\beta \tag{m}$$

分别求 $\dot{q}\ \delta\dot{q}$ 及 $q\delta q$ 如下

$$\begin{aligned}\dot{q}\ \delta\dot{q} = {} & [(1-3t^2)\alpha + (1-3t^2)(3t^2-5t^4)\beta + (1-3t^2)]\delta\alpha + \\ & [(1-3t^2)(3t^2-5t^4)\alpha + (3t^2-5t^4)^2\beta + (3t^2-5t^4)]\delta\beta\end{aligned} \tag{n}$$

$$\begin{aligned}q\delta q = {} & [t^2(1-t^2)^2\alpha + t^4(1-t^2)^2\beta + t^2(1-t^2)]\delta\alpha + \\ & [t^4(1-t^2)^2\alpha + t^6(1-t^2)^2\beta + t^4(1-t^2)]\delta\beta\end{aligned} \tag{o}$$

将以上两表达式代入 δS 的表达式

$$\delta S = \int_0^1 (\dot{q}\ \delta\dot{q} - q\delta q)\mathrm{d}t$$

时,需进行以下积分

$$\int_0^1 (1-3t^2)^2 \mathrm{d}t = \frac{4}{5}$$

$$\int_0^1 (1-3t^2)^2 \mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^1 (1-3t^2)(3t^2-5t^4)\mathrm{d}t = \frac{12}{35}$$

$$\int_0^1 t^2(1-t^2)^2 \mathrm{d}t = \frac{8}{105}$$

$$\int_0^1 t^2(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{2}{15}$$

$$\int_0^1 t^4(1-t^2)^2 \mathrm{d}t = \frac{8}{315}$$

$$\int_0^1 t^6(1-t^2)^2 \mathrm{d}t = \frac{8}{693}$$

$$\int_0^1 t^4(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{2}{35}$$

$$\int_0^1 (3t^2-5t^4)^2 \mathrm{d}t = \frac{92}{315}$$

$$\int_0^1 (3t^2-5t^4)\mathrm{d}t = 0$$

于是,由于 $\delta\alpha$ 与是 $\delta\beta$ 互相独立的, $\delta S = 0$ 给出以下两个方程

$$\left.\begin{aligned}684\alpha + 300\beta = 126 \\ 1100\alpha + 972\beta = 198\end{aligned}\right\}$$

解这个方程组,得到

$$\alpha = 0.188360 \quad \beta = -9.46101 \times 10^{-3}$$

就得到二阶近似解如下

$$q_2 = t + 0.18836t(1-t^2) - 9.46101 \times 10^{-3} t^3(1-t^2) \tag{p}$$

为了考擦近似解的可靠程度,我们将精确解(c)、一阶近似解(i) 及二阶近似解(p)、对于 $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 的值列表比较如下

t	精确解 q	一阶近似 q_1	二阶近似 q_2
0	0	0	0
0.2	0.236098	0.235368	0.236092
0.4	0.462783	0.461895	0.462780
0.6	0.671018	0.670737	0.671022
0.8	0.852502	0.853053	0.852504
1	1	1	1

由以上所列数字结果可知，精确解和近似解在端点 $t=0$ 及 $t=1$ 处都是准确满足的（这是作近似计算的基本前提），误差则是发生在区间 $0<t<1$ 内。一解近似已经给出很满意的结果（相对误差 $\varepsilon<1\%$）。至于二阶近似则准确到五位有效数字。

对于非保守系统，可从 Hamilton 原理的一般形式出发

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta' W)\mathrm{d}t=0 \tag{5-83}$$

取满足端点条件(5－78)的近似解

$$q_j=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\varphi_{jk}(k)\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{5-84}$$

由于这个曲线族满足端点条件，利用完整约束条件下 $d-\delta$ 的交换关系可将(5－83)式化为以下形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j\mathrm{d}t=0 \tag{5-85}$$

其中 T 为系统的动能，Q_j 为第 j 个广义力。由于

$$\delta q_j=\sum_{k=1}^{m}\delta a_{jk}\varphi_{jk}(t) \tag{5-86}$$

所以(5－85)又可表示为

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\varphi_{jk}(t)\right\}\delta a_{jk}\mathrm{d}t=0 \tag{5-87}$$

由于 δa_{jk} 的独立性，上式可分解为以下方程组

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\varphi_{jk}(t)\mathrm{d}t=0\quad\begin{pmatrix}k=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n\end{pmatrix} \tag{5-88}$$

和 Ritz 法类似，我们仍然可得到 $m\times n$ 个方程，可解 $m\times n$ 个未知量 a_{jk}，这种变分法称为 Galerkin 法，它是属于更一般的加权余量法中的一种基本方法，可以给 Galerkin 法一个简单的力学解释：对于精确解，以下表达式

$$\varepsilon(q_j)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\quad(j=1,\cdots,n) \tag{5-89}$$

应恒等于零。但对于近似解，表达式 $\varepsilon(q_j)$ 一般不等于零，它的值可以看成近似解带来的误差或余量（有人称为残值）。Galerkin 法的实质就是这个余量以 $\varepsilon(q_j)$ 为权函数条件下在时段 t_1-t_0 中的加权总余量为零。如果将 $\varepsilon(q_j)$ 看作近似解引起的不平衡广义力，则 Galerkin 法又可看作近似解引起的不平衡广义力在 $m\times n$ 组独立虚位移上且在时段 t_1-t_0 内的平均虚功为零。

假设近似解中的函数 $\varepsilon(q_j)$ 称为试探函数,它们一般应满足时端条件(5-78),但对于周期性运动的问题不必满足(5-78),只需满足以下条件就行了。

$$\delta q_j(t_0)=\delta q_j(t_1)\quad(j=1,\cdots,n)\tag{5-90}$$

这是因为,如果 $\delta q_j(t_0)\neq 0,\delta q_j(t_1)\neq 0$,,则有以下关系式

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta' W)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\bigg|_{t=t_1}-\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\delta q\bigg|_{t=t_0}\right)\tag{5-91}$$

如取试函数 φ_{jk} 为周期函数且 $t-t_0$ 为运动的一个周期,显然周期函数 $\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}$ 在 t_1 及 t_0 之值应相等,此时即使 $\delta q\Big|_{t=t_1}\neq 0$ 及 $\delta q_j\Big|_{t=t_0}\neq 0$,但只要满足(5-90),显然(5-91)式最后一个圆括弧项必为零。因之仍得到变分式

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j\mathrm{d}t=0\tag{5-92}$$

及变分式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\varphi_{jk}(t)\mathrm{d}t=0\quad\begin{pmatrix}k=1,\cdots,n\\ j=1,\cdots,n\end{pmatrix}\tag{5-93}$$

例 5-10 由 Hamilton 原理建立单自由度非线性自治系统的平均法。

解 考察以下带有小参数 ε 的自治系统运动方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon f(x,\dot{x})\tag{a}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,以上方程有周期解

$$x=a\cos\psi,\psi=\omega_0t+\theta\tag{b}$$

其中 a 与 θ 都是常数。当 $\varepsilon\neq 0$ 时,方程(a)的解仍可以保留(b)的形式,只是 a 与 θ 都不再是常数,而是时间 t 的函数,由于两个方程包含三个变量 x、a 与 θ,就可以自由的附加一个补充条件。比较方便的做法是使速度仍有 $\varepsilon=0$ 的形式,即

$$\dot{x}=-\omega_0a\sin\psi\tag{c}$$

将上式对 t 求导,可得

$$\ddot{x}=-\omega_0^2a\cos\psi-\omega_0\dot{a}\sin\psi-\omega_0a\dot{\theta}\cos\psi\tag{d}$$

变量 x 的变分为

$$\delta x=\cos\psi\delta a-a\sin\psi\delta\psi\tag{e}$$

由上式可知,在 $\psi_0=0$ 及 $\psi_1=2\pi$ 时都有 $\delta x=\delta a$,因之可建立 Galerkin 法的行列式

$$\int_0^{2\pi}[\ddot{x}+\omega_0^2x-\varepsilon f(x,\dot{x})]\delta x\mathrm{d}\psi=0\tag{f}$$

在这里我们用变量 ψ 代替了时间变量 t,显然(f)具有在一个周期内的加权余量为零的含意,将(c)和(d)代入了(f)式后可得

$$\int_0^{2\pi}[\omega_0\dot{a}\sin\psi+\omega_0\dot{\theta}\cos\psi+\varepsilon f(a\cos\psi,-\omega_0\sin\psi)]\times(\cos\psi\delta a-a\sin\psi\delta\psi)\mathrm{d}\psi=0\tag{g}$$

利用以下定积分公式

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\sin\psi\cos\psi = 0\\&\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\mathrm{d}\psi = \int_0^{2\pi}\cos^2\psi\mathrm{d}\psi = 2\pi\end{aligned}\right\}\tag{h}$$

由 δa 和 $\delta\psi$ 的独立性，可得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\sin\psi f(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi)\mathrm{d}\psi\\&\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\cos\psi f(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi)\mathrm{d}\psi\end{aligned}\right\}\tag{i}$$

这便是当自由度非线性系统平均法的基本公式，与用传统方法所得结果一致，但比传统方法概念更清晰，推导更简单，在这里，平均的含意是由 Galerkin 法中一个周期内的平均加权余量为零这一基本思想所规定的，而在传统的推导方法中，仅仅理解为非线性项在一周期中的平均，而且是在推导到最后才识别出来的。当 ε 是小参数时，a 与 θ 随时间缓慢的变化，以致这种变化在一个周期之内可以忽略不计，因之在求(i) 右端的积分时，a 和 θ 都可以视为常数。

5.4.2　基于微分原理的直接解法

从微分原理出发，同样可以建立近似解的直接法列式，以广义坐标表示的 d/Alembert-Lagrange 原理、Jourdain、及 Gauss 原理的表达式分别为

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0 \tag{5-94}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta\dot{q}_j = 0\\&\delta q_j = 0, \delta\dot{q}_j \neq 0\end{aligned}\right\}\tag{5-95}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta\dot{q}_j = 0\\&\delta q_j = 0, \delta\dot{q}_j = 0, \delta\dot{q}_j \neq 0\end{aligned}\right\}\tag{5-96}$$

将以上各式在 $t = t_0$ 及 $t = t_1$ 的区间上对时间 t 积分，即为在 δr 空间、$\delta\dot{r}$ 空间及 $\delta\ddot{r}$ 空间中的 Galerkin 法直接解格式：

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j\mathrm{d}t = 0 \tag{5-97}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j\mathrm{d}t = 0$$

$$\delta q_j = 0, \delta\dot{q}_j \neq 0 \tag{5-98}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j\mathrm{d}t = 0$$

$$\delta q_j = 0, \delta\dot{q}_j = 0, \delta\ddot{q}_j \neq 0 \tag{5-99}$$

值得注意的是，(5 - 97) 和基于固定时间端点处、各旁路有共同位形之条件

$$t = t_0, \delta q_j = 0; t = t_1, \delta q_j = 0 \tag{5-100}$$

下的 Hamilton 原理所得变分方程完全一致，但(5 - 97) 的推导过程中显然并不需要条件(5

-100,由此可知在应用基于 Hamilton 原理的直接法时,时端条件(5-100)的限制可以放松;相反,在取函数时可以引入初始条件后再求解。

例 5-11　用 Gauss 求解 Duffing 方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+hx^3=0 \tag{a}$$

的一次近似解,给定初始条件为:$x(0)=A,\dot{x}(0)=0$,其中 ω_0、h 及 A 为给定常数。

解　取以下形式的近似解

$$x=(A+a)\cos\omega t-a\cos3\omega t \tag{b}$$

其中 a 及 ω 视为待定可变参数,所设定近似解之加速度为

$$\ddot{x}=-P_1\cos\omega t+P_2(-\cos\omega t+9\cos3\omega t) \tag{c}$$

其中记

$$P_1=A\omega^2,P_2=a\omega^2 \tag{d}$$

将 P_1 及 P_2 视为加速度表达式中的可变参数,有

$$\delta\ddot{x}=\delta P_1\cos\omega t+\delta P_2(-\cos\omega t+9\cos3\omega t) \tag{e}$$

将(b)及(c)代入基于 Gauss 原理的 Galerkin 直接法列式

$$\int_0^T(\ddot{x}+\omega_0^2x+hx^3)\delta\ddot{x}\,\mathrm{d}t=0 \tag{f}$$

或

$$\int_0^{2\pi}\{-P_1\cos\omega t+P_2(-\cos\omega t+9\cos3\omega t)+\omega_0^2[(A+a)\cos\omega t-a\cos3\omega t]+$$

$$h[(A+a)\cos\omega t-a\cos3\omega t]\}\times[-\delta P\cos\omega t+\delta P_2(-\cos\omega t+9\cos3\omega t)]\mathrm{d}t=0 \tag{g}$$

由于 δP_1 及 δP_2 的独立性,上式积分后,可以分解为以下两方程

$$\omega^2-\omega_0^2+h\left[\frac{3}{4}(A+a)^2-\frac{3}{4}(A+a)a+\frac{3}{2}a^2\right]=0 \tag{h}$$

$$(A+82a)\omega^2-\omega_0^2(A+10a)+h\left[\frac{3}{2}(A+a)^3-\frac{51}{4}(A+a)^2a-\right.$$

$$\left.\frac{3}{2}(A+a)a^2-\frac{27}{4}a^3\right]=0 \tag{i}$$

其中的 P_1 及 P_2 已由(d)式引入了方程组,略去与 a^3 及 Aa^2 成正比的项,并将(h)式代入(i)式,可以求得

$$a=-\frac{h}{32}\frac{A^3}{\omega_0^2}\frac{1}{1+\dfrac{3hA^2}{4\omega_0^2}} \tag{j}$$

将此式代入(h),可得 $\omega^2=\omega_0^2+\dfrac{3}{4}hA^2$ 最后得到一次近似解如下

$$x=A\cos\omega t-\frac{hA^3}{32\omega^2}(\cos\omega t-\cos3\omega t) \tag{k}$$

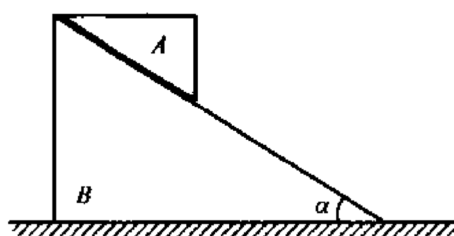
$$\omega^2=\omega_0^2+0.75hA^2 \tag{l}$$

习　题

5-1　质量为 m 的三棱柱 A 沿着质量为 M 三棱柱 B 的光滑斜面滑动,三棱柱 B 的斜

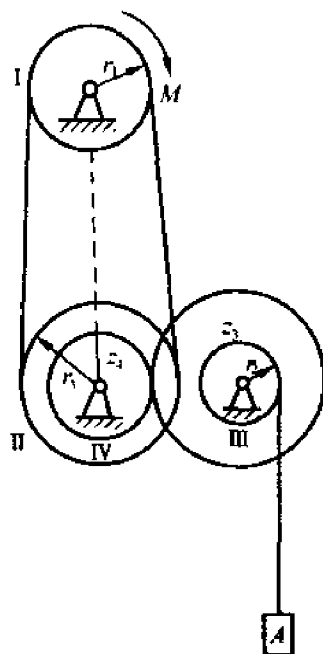
面与水平面成 α 角。如题图 5－1 所示。设开始时系统静止，摩擦不计。试用高斯最小约束原理求三棱柱 A、B 的加速度。

5－2　起重机构如题图5－2所示。主动轮Ⅰ，半径为 r_1，其上作用有不变的力偶 M，鼓轮Ⅱ和Ⅲ的半径分别为 r_2 和 r_3，齿轮Ⅳ和Ⅴ的齿数分别为 Z_4 和 Z_5。被提起重物 A 的重量为 P，设第 i 轮的转动惯量为 J_i，各轴承中的摩擦不计。试用高斯最小约束原理求重物加速度。

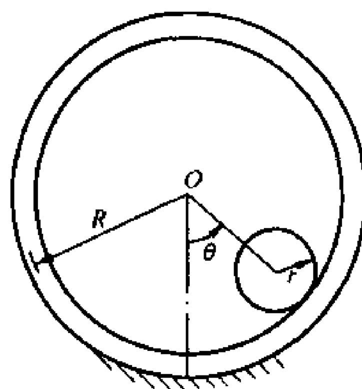


题图 5－1

5－3　一半径为 r 的小圆柱体，在半径为 R 的固定大圆柱筒内无滑动地滚动，如题图5－3 所示。试用高斯最小约束原理求运动微分方程以及圆柱质心切向加速度。



题图 5－2



题图 5－3

5－4　一质量为 m 的细管弯成半径为 r 的圆环，圆环可绕其边缘上一固定点在其平面内摆动，质量为 m 的质点在管内滑动如题图 5－4 所示。摩擦不计，试用高斯最小约束原理求其运动微分方程。

5－5　一质点在重力作用下自由下落，就其在 t_1 时限内的运动而言，试就下列三种情况：

(1) 真实运动　$z = \dfrac{1}{2}gt^2$；

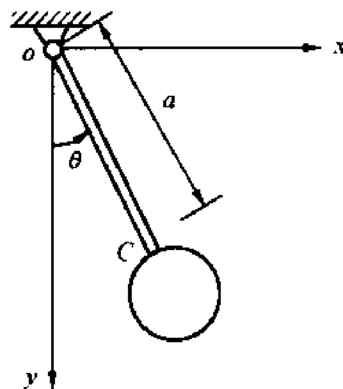
(2) 可能运动　$z = \dfrac{1}{2}gt_1t$；

(3) 可能运动　$z = \dfrac{1}{2t_1}gt^3$；

摆在图5－10所示平面内作大幅摆动时，试用哈密顿原理求复摆的运动微分方程，并求微幅摆动的周期。

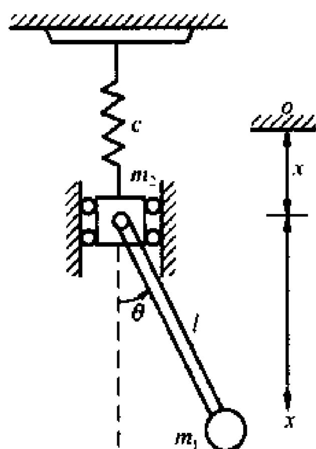


题图5－9

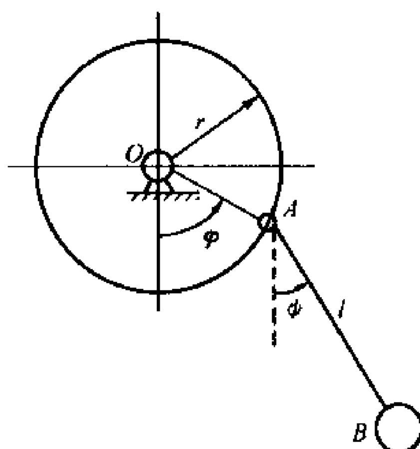


题图5－10

5－11　单摆摆长为l，质量为m_1，悬挂在另一质量为m_2的滑块上，滑块又悬挂在弹簧系数为c的弹簧上，并可沿铅垂方向的导轨上下振动，如题图5－11所示。试用哈密顿原理求系统的运动微分方程，又当考虑微幅摆动时，求其微分方程。



题图5－11



题图5－12

5－12　一均质圆盘，半径为r，质量为m_1，可绕垂直于盘面并通过盘心的水平轴O转动，在圆盘上A点悬挂长为l，质量为m的单摆，如题图5－12所示。试用哈密顿原理求系统的运动微分方程。

6　非完整系统动力学方程

一个力学系统如果存在非完整约束，则这个系统就是非完整系统。我们前面所介绍的 Lagrange 方程和 Hamilton 正则方程都不能解决非完整系统的运动问题，原因是系统的广义坐标的变分并非都是相互独立的，独立坐标变分的个数少于广义坐标的数目。对于非完整系统的动力学问题需采用其它的方法来解决。这一章介绍一下解决非完整系统动力学问题的几种常见方法。

6.1　第一类 Lagrange 方程

非完整系统动力学的基本问题是：已知主动力 $F_s(x,\dot{x},t)$ 和系统各质点的一组为约束所允许的初始位置 x_{s0} 和初始速度 $\dot{x}_{s0}(s=1,2,\cdots,3N)$，求系统的运动和约束反力。在这个问题中需要确定的未知量是 $3N$ 个 x_s 和 $3N$ 个 R_s，总共是 $6N$ 个未知量，但现在只有 $3N$ 个动力学方程

$$m\ddot{x}_s = F_s + R_s \quad (s=1,2,\cdots,3N) \tag{6-1}$$

和 $(l+g)$ 个约束方程，而一般总是 $l+g<3N$，故方程的数目小于未知量的数目，那么该问题就不能得到完全确定的解，必须再补充 $n=3N-(l+g)$ 个独立的方程，这可以从约束的力学性质得到。

考虑由 N 个质点组成的具有理想约束的离散的质点系统，该系统作用有 l 个完整约束，g 个一阶线性非完整约束。所以，在 $3N$ 个虚位移分量 δx_s 中，只有 $n=3N-(l+g)$ 个是独立的。不失一般，今设 $L(L=l+g)$ 个不独立的分量为 $\delta x_1,\delta x_2,\cdots,\delta x_L$。用虚位移所表示的系统的约束方程为

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs}\delta x_s = 0 \quad (r=1,2,\cdots,l+g) \tag{1-27}$$

由该方程我们可以将不独立的分量 $\delta x_1,\delta x_2,\cdots,\delta x_L$ 以独立的分量 $\delta x_{L+1},\delta x_{x+2},\cdots,\delta x_{3N}$ 表示。将这 L 个不独立的分量代入理想约束条件 $\sum_{s=1}^{3N} R_s\delta x_s=0$，则式中独立的分量 $\delta x_{L+1},\delta x_{x+2},\cdots,\delta x_{3N}$ 前的系数必须为零，由此便得到 $R_1,R_2,\cdots,R_{3N}$ 之间的 n 个方程，这样再加上 $3N$ 个动力学方程及 $(l+g)$ 个约束方程，共 $6N$ 个方程，便可以决定 $6N$ 个未知量，即：$3N$ 个 x_s 和 $3N$ 个 R_s。所以有了理想约束条件，非自由系统的动力学问题便一定可以解。

6.1.1　Lagrange 乘子法

在理论分析和具体应用中，并不一定按上述方法去找 n 个补充方程，下面介绍一种方法即 Lagrange 乘子法。

虚位移所应满足的约束方程为

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs}\delta x_s = 0 \quad (r = 1,2,\cdots,l+g) \tag{1-27}$$

理想约束条件为

$$\sum_{s=1}^{3N} R_s \delta x_s = 0 \tag{1-44}$$

将式(1－27)的每个方程分别乘以待定乘子 $\lambda_r(r = 1,2,\cdots,L)$,然后求和,再与(1－44)式相减得

$$\sum_{s=1}^{3N}\Big(R_s - \sum_{r=1}^{L}\lambda_r A_{rs}\Big)\delta x_s = 0 \tag{6-2}$$

在式(6－2)中,对于不独立的虚位移分量 $\delta x_1,\delta x_2,\cdots,\delta x_L$ 可以这样处理,即通过适当选择 $\lambda_r(r = 1,2,\cdots,L)$ 而使这些分量前面的系数为零,余下独立的虚位移分量前面的系数必须全为零,于是便有

$$R_s = \sum_{r=1}^{L}\lambda_r A_{rs} \quad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{6-3}$$

这样就将 $3N$ 个未知量通过约束方程以 L 个未知量 λ_r 表示出来了,所以系统未知量的个数现在为 $3N$ 个 x_s 及 L 个 λ_r,而方程的个数为 $3N$ 个动力学方程及 L 个约束方程,问题则能求解,这个方法称 Lagrange 乘子法。

6.1.2 第一类 Lagrange 方程

由 Lagrange 乘子法有

$$R_s = \sum_{r=1}^{L}\lambda_r A_{rs} \quad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{6-3}$$

如果系统受有完整约束及非完整约束分别为

$$f_\alpha(x,t) = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

$$f_\beta(x,\dot{x},t) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-2}$$

且非完整约束为一阶线性非完整约束,则

对于完整约束

$$R_s = \sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s} \tag{6-4}$$

对于非完整约束

$$R_s = \sum_{\beta=1}^{g}\gamma_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{x}_s} \tag{6-5}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_g$ 都是待定乘子,将以上两式代入牛顿方程有

$$m_s\ddot{x}_s = F_s + \sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s} + \sum_{\beta=1}^{g}\gamma_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{x}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{6-6}$$

这就是第一类拉格朗日方程。

$3N$ 个第一类 Lagrange 方程和 $l+g$ 个约束方程构成求解这些未知函数的一个封闭方程组。当质点和约束方程都很多时,这组方程的数目很大,要进行积分是很困难的,所以通常第一类 Lagrange 方程适用于离散的质点系。

例 6－1 质量为 m_1 的质点 A,放在倾角为 α,质量为 m_2 的三角形楔块的斜边上,楔

块又可在水平面上滑动，如图6－1所示，不计摩擦，试用第一类拉格朗日方程求质点和楔块的加速度以及它们所受的约束力。

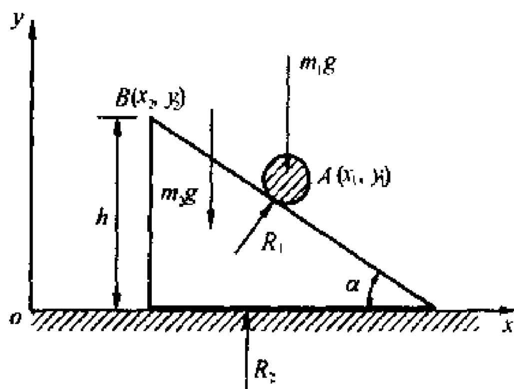


图6－1

解 设质点A的坐标为$A(x_1,y_1)$，楔块作直线移动，故只要有一个x坐标就可确定其位置，为方便起见，取B点坐标$B(x_2,y_2)$来代替，故系统的约束方程为

$$f_1 = y_2 - y_1 - (x_1 - x_2)\tan\alpha = 0 \tag{a}$$

$$f_2 = y_2 - h = 0 \tag{b}$$

式中h为楔块高度，则

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\tan\alpha, \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = -1, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \tan\alpha, \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 1 \tag{c}$$

由第一类拉格朗日方程，有

$$m_1\ddot{x}_1 = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

$$m_1\ddot{y}_1 = -m_1g + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

$$m_2\ddot{y}_2 = -m_2g + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_2} \tag{d}$$

将式(c)代入式(d)，得

$$m_1\ddot{x}_1 = -\lambda_1\tan\alpha, m_1\ddot{y}_1 = -m_1g - \lambda_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -\lambda_1\tan\alpha, m_2\ddot{y}_2 = -m_2g + \lambda_1 + \lambda_2 \tag{e}$$

上述式(a)、(b)、(e)等六个方程可求解六个未知数$x_1,y_1,x_2,y_2,\lambda_1,\lambda_2$等。

由式(a)和式(b)有

$$\ddot{y}_1 = (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan\alpha, \ddot{y}_2 = 0 \tag{f}$$

代入(e)，得

$$m_1(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan\alpha = -m_1g - \lambda_1, m_2g = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{g}$$

由式(e)解得$\ddot{x}_1$和$\ddot{x}_2$代入式(g)，得

$$\lambda_1 = -\frac{m_1m_2g\cos^2\alpha}{m_2 + m_1\sin^2\alpha} \tag{h}$$

将上式代入(g)，得

$$\lambda_2 = m_2g - \lambda_1 = \left(m_2 + \frac{m_1m_2g\cos^2\alpha}{m_2 + m_1\sin^2\alpha}\right)$$

$$\ddot{x}_1 = \left(\frac{m_2 g\sin\alpha\cos\alpha}{m_2 + m_1\sin^2\alpha}\right)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{m_1 g\sin\alpha\cos\alpha}{m_2 + m_1\sin^2\alpha}$$

将上两式代入(f),得

$$\ddot{y}_1 = -\frac{(m_1 + m_2)g\sin^2\alpha}{m_2 + m_1\sin^2\alpha}$$

假设质点 A 所受的约束力为 $\boldsymbol{R}_1$,由于不计摩擦,故 $\boldsymbol{R}_1$ 为垂直于楔块斜边的法向反力,列出质点 A 在 x 方向的动力学方程为

$$m_1\ \ddot{x}_1 = R_1\sin\alpha$$

此式与式(e) 比较知

$$R_1\sin\alpha = -\lambda_1\tan\alpha$$

于是得到

$$R_1 = -\frac{\lambda_1}{\cos\alpha} = \frac{m_1 m_2 g\cos\alpha}{m_2 + m_1\sin^2\alpha}$$

假设楔块所受水平面的约束力为 $\boldsymbol{R}_2$,列出楔块在 y 方向的动力学方程为

$$m\ \ddot{y}_2 = R_2 - m_2 g - R_1\cos\alpha = R_2 - m_1 g + \lambda_1$$

此式与式(e) 比较知

$$R_2 = \lambda_2 = \left(m_2 + \frac{m_1 m_2 g\cos^2\alpha}{m_2 + m_1\sin^2\alpha}\right)g$$

例 6 – 2　质量均为 $m = 1$ 的两个质点 M_1, M_2,由一长为 l 的无重刚杆相连,并在铅垂面内运动,系统运动时,有一约束使其质心的速度始终沿着杆的方向。假设开始时,杆处于水平,质心的初速度为 v_0,杆的初角速度为 ω_0,坐标放置如图 6 - 2 所示。求这两个质点的运动和所给予系统的约束力。

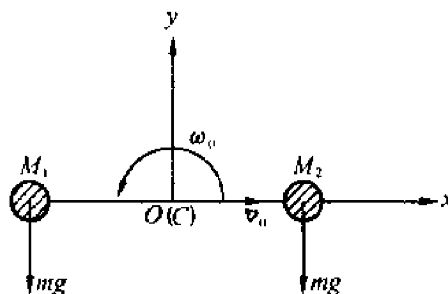


图 6 - 2

解　设两质点的坐标分别为 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,系统的完整约束方程为

$$\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2] = 0 \tag{a}$$

式中系数 $\frac{1}{2}$ 为以后推算方便而加的。

系统的非完整约束方程为

$$(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (y_2 - y_1)(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) = 0 \tag{b}$$

由第一类拉格朗日方程,考虑到 $m = 1$,则有

$$-\ddot{x}_1 - \lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1) = 0 \tag{c}$$

$$-\ddot{x}_2 + \lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1) = 0 \tag{d}$$

$$-g - \ddot{y}_1 - \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) = 0 \tag{e}$$

$$-g - \ddot{y}_2 - \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) = 0 \tag{f}$$

由式(c) + 式(d),式(e) + 式(f),得

$$(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1) + 2\mu(y_2 - y_1) = 0$$

$$(\ddot{y}_2 + \ddot{y}_1)2g - 2\mu(x_2 - x_1) = 0$$

将上两式消去 μ,得

$$(x_2 - x_1)(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + (y_2 - y_1)(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + 2g(y_2 - y_1) = 0$$

又由式(d) - 式(c),式(f) - 式(e),得

$$-(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + 2\lambda(x_2 - x_1) = 0$$

$$-(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + 2\lambda(y_2 - y_1) = 0$$

将上两式消去 λ,得

$$(y_2 - y_1)(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - (x_2 - x_1)(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) = 0$$

为方便计,令

$$u = x_2 - x_1, v = y_2 - y_1, P = \dot{x}_1 + \dot{x}_2, Q = \dot{y}_1 + \dot{y}_2$$

则式(a)、(h)、(b)、(g) 为

$$u^2 + v^2 = l^2 \tag{i}$$

$$\ddot{u}\,v - u\,\ddot{v} = 0 \tag{j}$$

$$Pv - Qu = 0 \tag{k}$$

$$\dot{P}\,u + \dot{Q}\,v + 2gv = 0 \tag{l}$$

式(i) 表明,可以看成一点在(u,v) 平面上圆周运动,式(j) 表示这点加速度恒指向圆心,所以一定为等速圆周运动,如图 6 - 3 所示,故可以写为

$$u = l\cos\varphi, v = l\sin\varphi$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \dot{\varphi} = \omega_0 \tag{m}$$

φ 为杆与水平轴x 的夹角,ω 为常数,当 $t = 0, \varphi = \varphi_0 = 0$,式(k) 可写为

$$P : Q = u : v = \cos\omega_0 t : \sin\omega_0 t$$

设

$$P = \psi\cos\omega_0 t, Q = \psi\sin\omega_0 t \tag{n}$$

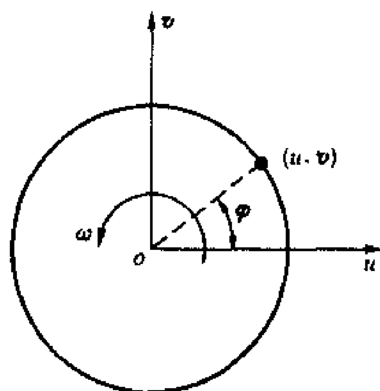


图 6 - 3

将上式代入(l),得

$$\frac{d\psi}{dt} = -2g\sin\omega_0 t$$

积分,得

$$\psi = \frac{2g}{\omega}\cos\omega_0 t + c$$

将此再代入式(n),得

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \left(\frac{2g}{\omega_0}\cos\omega_0 t + c\right)\cos\omega_0 t$$

$$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = \left(\frac{2g}{\omega_0}\cos\omega_0 t + c\right)\sin\omega_0 t \tag{o}$$

由初始条件:$t = 0, v_{c0} = \dfrac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{2} = v_0$

非完整约束力 N''

式(b)又可写为

$$a_1\dot{x}_1 + a_2\dot{x}_2 + a_3\dot{y}_1 + a_4\dot{y}_2 = 0$$

式中

$$a_1 = a_2 = -(y_2 - y_1)$$
$$a_3 = a_4 = x_2 - x_1$$

所以

$$N''_{1x} = \mu a_1 = -\mu(y_2 - y_1)$$
$$N''_{1y} = \mu a_3 = \mu(x_2 - x_1)$$
$$N''_{2x} = \mu a_2 = -\mu(y_2 - y_1)$$
$$N''_{2y} = \mu a_4 = \mu(x_2 - x_1)$$

故

$$N''_1 = N''_2 = \sqrt{(\mu a_1)^2 + (\mu a_3)^2} = \mu\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \mu l$$

由前面知

$$\mu = \frac{-(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)}{2(y_2 - y_1)} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{2g}{\omega_0}\cos^2\omega_0 t + 2\left(v_0 - \dfrac{g}{\omega_0}\right)\cos\omega_0 t\right]}{-2l\sin\omega t}$$
$$= \frac{g}{l}(2\cos\omega_0 t - 1) + \frac{\omega_0 v_0}{l}$$

则得

$$N''_1 = N''_2 = g(2\cos\omega_0 t - 1) + \omega_0 v_0$$

N''_1 与 N''_2 相等而且均垂直于杆的轴线，这样才能使两质点作等角速转动。另外，也保证 V_c 方向始终沿杆的方向的必要约束力，如图 6－4 所示。

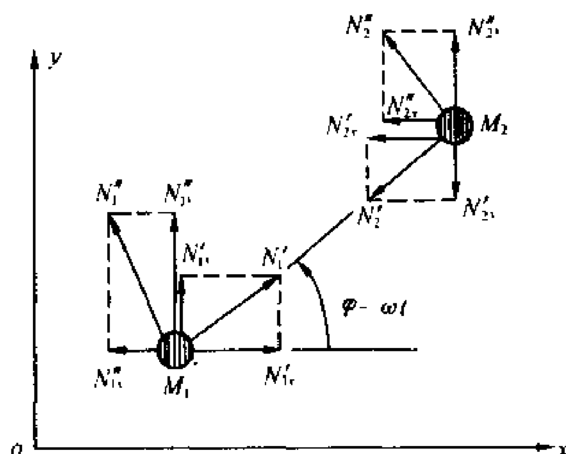


图 6－4

例 6－3　质量为 m 的光滑小环，套在半径为 r 且固定于铅垂平面内的大圆环上如图 6－5 所示。如 $t = 0$ 时，小环 A 无初速地自大圆环水平直径的一端 B 下落，求小环在重力作

用下运动的速度、加速度及所受到的约束反力。

解 小环只受到一个完整的约束,即

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

所以待定乘子只有一个,设为 λ,由(6-6)式有

$$m\ddot{x} = 2\lambda x$$

$$m\ddot{y} = mg + 2\lambda y$$

具体求解时需联立上面三个式子。

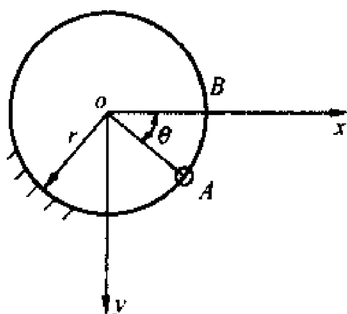


图6-5

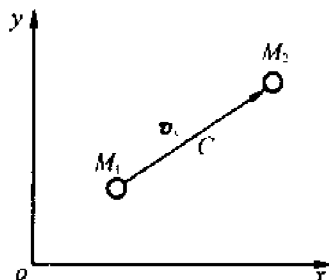


图6-6

例6-4 质量均为 $m=1$ 的两个质点 M_1 和 M_2,由一长为 l 的刚杆联接,杆的质量忽略不计。设此系统只在铅垂平面内运动,且杆的中点速度只沿杆子方向如图6-6所示。求质点 M_1 和 M_2 的运动。

解 取系统的坐标参数为 x_1, y_1, x_2, y_2

完整和非完整约束方程分别为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (y_2 - y_1)(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) = 0$$

故可设 Lagrange 乘子为 λ, γ,所以由(6-6)式有

$$\ddot{x}_1 = -2\lambda(x_2 - x_1) - \gamma(y_2 - y_1)$$

$$\ddot{y}_1 = -g - 2\lambda(y_2 - y_1) + \gamma(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x}_2 = 2\lambda(x_2 - x_1) - \gamma(y_2 - y_1)$$

$$\ddot{y}_2 = -g + 2\lambda(y_2 - y_1) + \gamma(x_2 - x_1)$$

联立上面六个式子即可求解。

6.2 一阶线性非完整系统的 Lagrange 方程

在第二章中,我们研究了第二类拉格朗日方程,由于它采用了广义坐标和引进能量的概念,使求解方便,得到了广泛的应用,但它只能适用于完整系统。在上节中所讨论的第一类拉格朗日方程,由于采用了待定乘子法,消去了不独立的坐标变分,而又能适用于非完整系统,但是它应用了直角坐标系,方程式数比自由度数多,计算比较烦,在应用时有一定的困难。由

此，不难想到，如果将两者结合起来，既可以解非完整系统的动力学问题，又可使求解方便，这就是本节要讨论的一阶线性非完整系统的拉格朗日方程。

设由 N 个质点组成的力学系统，受有 l 个完整约束，g 个一阶线性非完整约束。对于这样一个系统，我们取 n 个广义坐标来描述系统的位形，则完整约束就可以不再考虑了，但由于有 g 个非完整约束的存在，则这些广义坐标的变分之间并不是相互独立的；广义坐标的变分应满足如下的约束方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\beta j}\delta q_j = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-35}$$

将动力学的普遍方程用广义坐标来表示，我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0 \tag{2-15}$$

由式(1－35)广义坐标的变分之间并不相互独立，所以不能由式(2－15)得到第二类 Lagrange 方程。这里我们仍然采用拉格朗日乘子法，引入 g 个待定乘子 $\lambda_\beta(\beta = 1,2,\cdots,g)$，将式(1－35)中的每个式子乘上相应的 λ_β 后再相加得

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\beta j}\delta q_j = 0 \tag{6-7}$$

用式(2－15)减式(6－7)，得

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{r=1}^{g}\lambda_\beta a_{\beta j}\right]\delta q_j = 0 \tag{6-8}$$

这样可以选取 g 个待定乘子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_g$ 使式(6－8)中 g 个不独立的广义坐标变分前的系数等于零，而对于其余的 $(n-g)$ 个广义坐标变分前的系数，由于变分是独立的，因此，必然等于零。这样，就得到了一阶线性非完整系统的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{r=1}^{g}\lambda_\beta \cdot a_{\beta j} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{6-9}$$

式(1－35)和式(6－9)联立，即可解出 $(n+g)$ 个未知量 $q_1,q_2,\cdots,q_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_g$。

由式(6－9)我们看方程右端的第二项，不难理解这一项是由于非完整约束引起的广义力。

由一阶线性非完整约束的约束方程

$$f_\beta(q,\dot{q},t) = \sum_{j=1}^{n} a_{\beta j}\dot{q}_j + a_\beta = 0 \tag{6-10}$$

则式(6－9)中的 $a_{\beta j}$ 可写为

$$a_{\beta j} = \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_j} \quad (\beta = 1,2,\cdots,g; j = 1,2,\cdots,n) \tag{6-11}$$

故式(6－9)又可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{6-12}$$

如果系统为非完整约束保守系统，则上式还可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{r=1}^{g}\lambda_r\frac{\partial g_r}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{6-13}$$

例 6－5 一半径为 r 的圆环，质量为 m，沿倾角为 α 的斜面无滑动地滚动，如图 6－7 所示，试研究圆环的运动规律并求出斜面的约束反力。

解 本题实际上是完整系统，但作为应用我们考虑系统为非完整系统，取广义坐标为 x_c,y_c,θ，圆环受到两个非完整约束，即

$$\dot{y}_c=0 \quad (1)$$

$$\dot{x}_c-r\dot{\theta}=0 \quad (2)$$

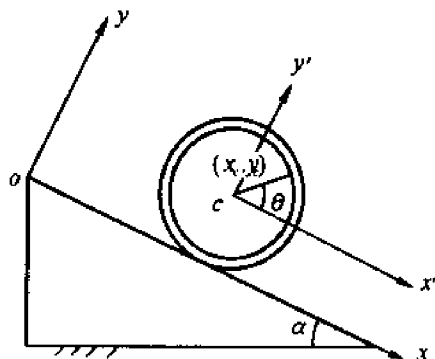


图 6－7

将上面的约束方程写成标准形式

$$0\cdot\dot{x}_c+1\cdot\dot{y}_c+0\cdot\dot{\theta}=0$$

$$1\cdot\dot{x}_c+0\cdot\dot{y}_c-r\cdot\dot{\theta}=0$$

这样式(6－9)中的 a_{η} 分别为

$$a_{1x}=0,a_{1y}=1,a_{1\theta}=0$$

$$a_{2x}=1,a_{2y}=0,a_{2\theta}=-r$$

系统的动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

系统的势能(以 o 为零势能点)

$$V=-mg(x_c\sin\alpha-y_c\cos\alpha)$$

则广义力为

$$Q_x=-\frac{\partial V}{\partial x_c}=mg\sin\alpha$$

$$Q_y=-\frac{\partial V}{\partial y_c}=-mg\cos\alpha$$

$$Q_\theta=0$$

将以上各式代入非完整系统的 Lagrange 方程得

$$m\ddot{x}_c=mg\sin\alpha+\lambda_2 \quad (3)$$

$$m\ddot{y}_c=-mg\cos\alpha+\lambda_1 \quad (4)$$

$$mr^2\ddot{\theta}=-\lambda_2 r \quad (5)$$

联立式(1)(2)(3(4)(5) 即可求解。

例 6－6 平面上有两个质点 m_1 及 m_2，系统运动时 m_1 对 m_2 进行追踪，即 m_1 的速度始终对准 m_2，如图 6－8 所示。试用非完整系统的 Lagrange 方程求系统的运动微分方程。

解 取广义坐标为 x_1,y_1,x_2,y_2，约束方程为

$$\frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

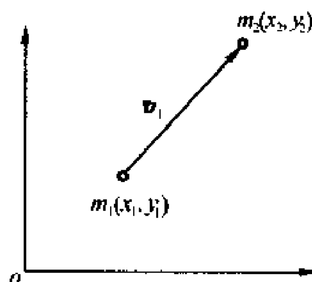


图 6－8

整理为

$$(y_2-y_1)\dot{x}_1+(x_1-x_2)\dot{y}_1=0 \quad (1)$$

将上式写成完整形式为

$$(y_2-y_1)\dot{x}_1+(x_1-x_2)\dot{y}_1+0\cdot\dot{x}_2+0\cdot\dot{y}_2=0$$

故

$$a_{1x_1}=y_2-y_1,a_{1y_1}=x_1-x_2,a_{1x_2}=0,a_{1y_2}=0$$

动能

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

将以上各式代入非完整系统的 Lagrange 方程有

$$m_1\ddot{x}_1=\lambda_1(y_2-y_1) \tag{2}$$

$$m_1\ddot{y}_1=\lambda_1(x_2-x_1) \tag{3}$$

$$m_2\ddot{x}_2=0 \tag{4}$$

$$m_2\ddot{y}_2=0 \tag{5}$$

联立式(1)(2)(3)(4)(5) 即可求解。

下面我们再用待定乘子法来讨论一下完整系统及非完整系统的拉格朗日方程。

对于完整系统,有时为了求某些约束力,在选取广义坐标时暂时不考虑相应的约束,这样对于原有 n 个广义坐标(亦即完整系统的自由度数为 n)的系统,我们可选取 $n+l$ 个广义坐标,显然这 l 个广义坐标是不独立的;将动力学的普遍方程用广义坐标表示,有

$$\sum_{j=1}^{n+l}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right]\delta q_j=0 \tag{6-14}$$

显然上式中的广义坐标的变分之间并不独立,所以暂不由上式来得到第二类拉格朗日方程;这里我们仍然采用拉格朗日乘子法。假定有 l 个完整约束

$$\sum_{j=1}^{n+l}\frac{\partial f_r}{\partial q_j}\delta q_j=0\quad(r=1,2,\cdots,l) \tag{6-15}$$

引入 l 个待定乘子 $\lambda_r(r=1,2,\cdots,l)$,将上式中的每个式子乘上相应的 λ_r 后再相加,得

$$\sum_{j=1}^{n+l}\sum_{r=1}^{l}\lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial q_j}\delta q_j=0 \tag{6-16}$$

用式(6-14)减去上式,得

$$\sum_{j=1}^{n+l}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j-\sum_{r=1}^{l}\lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial q_j}\right]\delta q_j=0 \tag{6-17}$$

这样可以选取 l 个待定乘子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 使上式中不独立的广义坐标变分前的系数等于零,而对于其余的 n 个广义坐标变分前的系数,由于变分是独立的,因此,必然等于零。这样就可以得到了下面的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\sum_{r=1}^{l}\lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial q_j}\quad(j=1,2,\cdots,n+l) \tag{6-18}$$

同理对于保守系统则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=\sum_{r=1}^{l}\lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial q_j}\quad(j=1,2,\cdots,n+l) \tag{6-19}$$

式(6-18)与 l 个完整约束方程联立,可解出 l 个待定乘子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$,并确定系统的运动规律。

在上述问题中,暂时先保留下的这些不独立的坐标我们又将它们称为多余坐标。在某些问题中,消去不独立坐标不太方便时,往往先保留这些多余坐标,即特意选取多于系统自由度数的广义坐标,然后再用待定乘子法将它们消去,于是得到了与式(6-18)相同的方程,此时,它就变为求解完整系统具有多余坐标时的运动微分方程。不难看出,式(6-18)中的

最后一项，即为系统相应的约束加于系统的约束力的广义力。

对于更一般情况，如果系统由 N 个质点组成，有 l 个完整约束和 g 个非完整约束，系统的自由度数为 n。现取 s 个广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_s$ 来确定系统的位置，且 $s>n$，则同样可得到下面的动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j}+\sum_{\beta=1}^{g}\gamma_\beta\cdot\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_j}\quad (j=1,2,\cdots,s)\quad (6-20)$$

例 6－7 如图 6－9 所示系统，A,B,C 物块质量均为 m，用一不可伸长的轻绳通过滑轮系住。各滑轮质量不计，A,C 物块分别放在倾角为 α 和 β 的光滑斜面上。B 物块吊在动滑轮上，只能在铅垂方向运动。试求各物块的加速度。

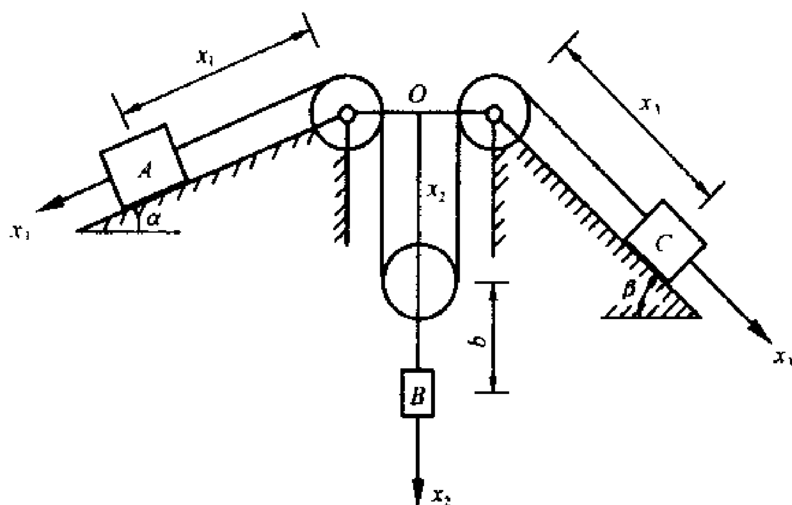


图 6－9

解 系统为完整系统，具有两个自由度，为方便计选 x_1,x_2,x_3 为描述位形的坐标，显然有一个坐标是多余的，不独立的。设绳长为 l，则系统的约束方程为

$$f=x_1+2x_2+x_3+d-l=0 \tag{a}$$

式中 d 为常数。

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)$$

取过 O 点水平面为重力零势面，系统的势能为

$$V=-mg(x_1\sin\alpha+x_2+b+x_3\sin\beta)$$

故拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)+mg(x_1\sin\alpha+x_2+b+x_3\sin\beta)$$

取待定乘子 λ，而

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1,\frac{\partial f}{\partial x_2}=2,\frac{\partial f}{\partial x_3}=1$$

然后代入到式(a)中有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_j}\quad j=1,2,3$$

则得

$$m\ddot{x}_1=mg\sin\alpha+\lambda \tag{b}$$

$$m\ddot{x}_2=mg+2\lambda \tag{c}$$

$$m\ddot{x}_3=mg\sin\beta+\lambda \tag{d}$$

由式(a),有

$$\ddot{x}_1+2\ddot{x}_2+\ddot{x}_3=0 \tag{e}$$

由式(b)、(c)、(d)、(e)联立求解,得

$$\ddot{x}_1=\frac{g}{6}(5\sin\alpha-\sin\beta-2)$$

$$\ddot{x}_2=\frac{g}{3}(1-\sin\alpha-\sin\beta)$$

$$\ddot{x}_3=\frac{g}{6}(5\sin\beta-\sin\alpha-2)$$

$$\lambda=-\frac{mg}{6}(\sin\alpha+\sin\beta+2)$$

由上述方程可以看出,λ 就是绳子的张力。

例6－8 冰鞋及其上的总质量为 m,对质心转动惯量为 J,在质心 C 处装有冰刀,在水平冰面上运动,其质心速度始终沿冰刀的纵向。假设所受阻力 $\boldsymbol{F}=-c\boldsymbol{v}$,通过质心,式中 c 为常数。当开始时,$x(0)=0,y(0)=0,\varphi(0)=0$,$\dot{x}(0)=v_0,\dot{y}(0)=0,\dot{\varphi}(0)=\omega$,如图6－10所示,试求冰鞋的运动规律。

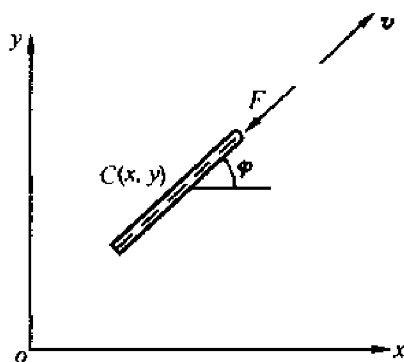


图6－10

解 取冰鞋质心坐标 x,y 及冰刀的方向角 φ 为广义坐标,按题意系统的约束方程为

$$\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi=0 \tag{a}$$

是非完整约束方程,故系统的自由度数为2。

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \tag{b}$$

给系统以虚位称 $\delta x,\delta y$ 和 $\delta\varphi$,则主动力 $\boldsymbol{F}$ 在虚位移上元功之和为

$$\delta A=F_x\delta x+F_y\delta y+0\cdot\delta\varphi=-c\dot{x}\,\delta x-c\dot{y}\,\delta y \tag{c}$$

故广义力分别为

$$Q_x=-c\dot{x},Q_y=-c\dot{y},Q_\varphi=0 \tag{d}$$

由

$$g=\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi$$

有

$$a_{1x}=\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}=\sin\varphi,a_{1y}=\frac{\partial g}{\partial \dot{y}}=-\cos\varphi,a_{1\varphi}=\frac{\partial g}{\partial \dot{\varphi}}=0 \tag{e}$$

设待定乘子为 λ,将式(b)、(d)、(e)代入到式(6－9),得

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} + \lambda\sin\varphi \tag{f}$$

$$m\ddot{y} = -c\dot{y} - \lambda\cos\varphi \tag{g}$$

$$J\dot{\varphi} = 0 \tag{h}$$

由式(f)、(g) 消去 λ，得

$$(m\ddot{x} + c\dot{x})\cos\varphi + (m\ddot{y} + c\dot{y})\sin\varphi = 0 \tag{i}$$

由式(h) 及初始条件 $\dot{\varphi}(0) = \omega, \varphi(0) = 0$ 得

$$\varphi(t) = \omega t$$

代入式(a)

$$\dot{y} = \dot{x}\tan\omega t$$

并对 t 求导，得

$$\dot{y} = \dot{x}\tan\omega t + \frac{\omega\dot{x}}{\cos^2\omega t}$$

将上式代入式(i)，得

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m} + \omega\tan\omega t\right)\dot{x} = 0 \tag{j}$$

由上式可解出 $x = x(t)$，最后可解得 $y = y(t)$。

先考虑无阻力情况，即 $c = 0$，由上式及初始条件，得

$$\dot{x} = v_0\cos\omega t, x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

代入式(a) 解得

$$\dot{y} = v_0\sin\omega t, y = \frac{v_0}{\omega}(1 - \cos\omega t)$$

由此可知，冰鞋质心绕中心 $\left(0, \frac{v_0}{\omega}\right)$ 作匀速圆周运动，半径为 $\frac{v_0}{\omega}$，如图 6 - 11(a) 所示。再考虑有阻力情形，即 $c \neq 0$，求解式(j)，得

$$x = R[\sin\alpha + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sin(\omega t - \alpha)]$$

$$y = R[\cos\alpha - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos(\omega t - \alpha)]$$

$$\varphi = \omega t, \lambda = mv_0\omega e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中衰减特征时间 $\tau = \frac{m}{c}, R = v_0\cos\alpha/\omega, \alpha = \arctan\frac{c}{m\omega}$

质心速度大小按指数规律衰减，即 $v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$，质心轨道的曲率半径为 $\rho = \frac{v}{\omega} = \frac{v_0}{\omega}e^{-\frac{t}{\tau}}$，如图 6 - 11(b) 所示。

6.3 非完整系统的阿贝尔方程

阿贝尔(Apell) 方程是用来解决非完整系统动力学的在数学结构上形式比较简单的一种方程，这是 Apell 方程的主要优点，下面我们来推导这个方程。为此，引入一些新的概念。

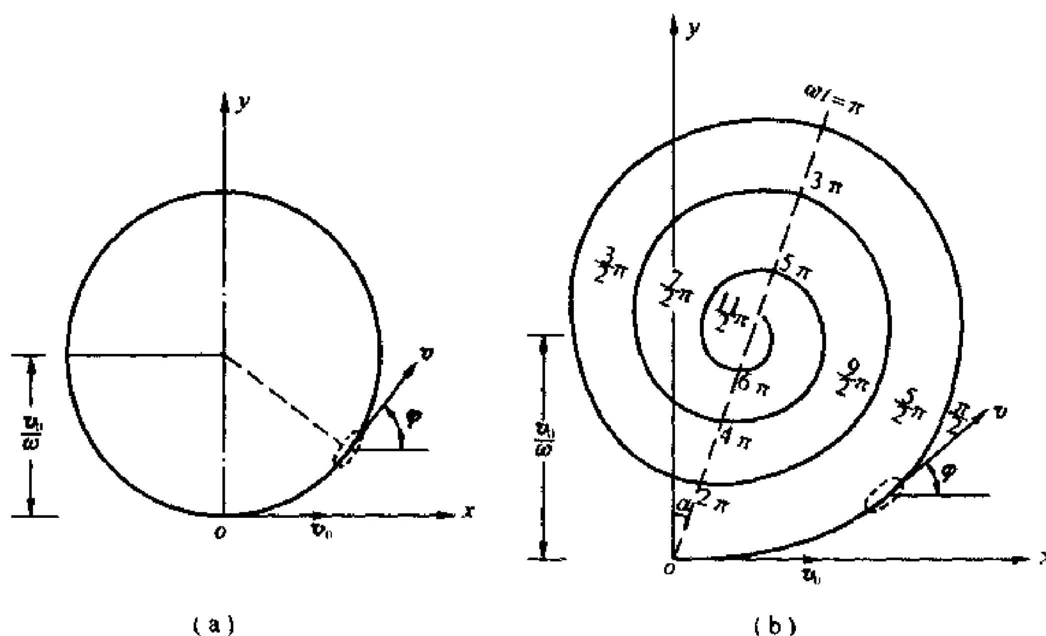


图 6 - 11

6.3.1 准速度与准坐标

当以广义坐标 q 确定系统的位形时，用广义速度 $\dot{q}$ 来描述系统各点的速度是很自然的，但在有些场合，不直接采用广义速度而采用广义速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 的 n 个函数

$$\dot{\pi}_1 = f_1(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)$$
$$\dot{\pi}_2 = f_2(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\dot{\pi}_n = f_n(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t) \tag{6-21}$$

来描述系统各点的速度时有时更为方便，这里惟一的要求是这 n 个 $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \cdots, \dot{\pi}_n$ 是彼此独立的，而且与广义速度能一对一地转换。这样我们将这 n 个 $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \cdots, \dot{\pi}_n$ 称为准速度。

一般情况下尤其是对于完整系统和一阶线性非完整系统常取准速度为 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 的线性组合

$$\dot{\pi}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\dot{q}_j + a_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{6-22}$$

其中 a_{kj} 及 a_k 都是 q, t 的函数。

$\dot{\pi}$ 和 $\dot{q}$ 能实现一对一地转换的条件是

$$\det[a_{kj}]\Big|_{k,j=1}^{n} \neq 0 \tag{6-23}$$

于是由式(6 - 22)我们可解出

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\dot{\pi}_k + b_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{6-24}$$

将式(6 - 22)写成微分形式，并引入记号 $d\pi_k = \dot{\pi}_k dt$ 则有

$$d\pi_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} dq_j + a_k \mathrm{d}t \qquad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{6-25}$$

如果式(6－25)能积分成有限形式，则有

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\ \pi_2 &= \pi_2(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\ &\cdots\cdots \\ \pi_n &= \pi_n(q_1, q_2, \cdots, q_n) \end{aligned} \tag{6-26}$$

这表明 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 不过是另外一组广义坐标，$\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \cdots, \dot{\pi}_n$ 为与之相应的广义速度。但实际上我们并不要求式(6－25)一定可积成为有限形式，因为 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 本身不一定有任何意义，同时也不一定存在，但为了后面的应用我们将这样一组坐标 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 称之为准坐标。

6.3.2 速度、广义速度、准速度之间的关系式

$$x_s = x_s(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \qquad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{1-14}$$

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \qquad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{1-16}$$

将 $\dot{q}_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \dot{\pi}_k + b_j (j = 1,2,\cdots,n)$ 代入上式有

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_{jk} \dot{\pi}_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{6-27}$$

上式可写为

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_{jk} \dot{\pi}_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{6-28}$$

引入记号

$$\frac{\partial(\ )}{\partial \pi_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\ )}{\partial q_j} b_{jk} \qquad D_s = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \tag{6-29}$$

则有

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial \pi_k} \dot{\pi}_k + D_s \qquad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{6-30}$$

由式(6－30)可知准速度也是描述系统各点速度的一组独立参数。

如果系统有 g 个一阶线性非完整约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\beta j} \dot{q}_j + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-18}$$

则 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 间只有 $n-g$ 个是独立的。令 $m = n - g$，则此时可取 m 个准速度作为描述系统各点速度的独立参数，不失一般性，可取

$$\dot{\pi}_k = \sum_{j=1}^{n} h_{kj} \dot{q}_j + h_k \qquad (k = 1,2,\cdots,m) \tag{6-31}$$

$$\dot{\pi}_{m+\beta} = \sum_{j=1}^{n} a_{\beta j} \dot{q}_j + a_\beta \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6-32}$$

并且使

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{\pi}_k}\delta\pi_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial \ddot{\pi}_k}\left(\frac{1}{2}m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i^2\right)\right]\delta\pi_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial \ddot{\pi}_k}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i^2\right)\right]\delta\pi_k \qquad (6-46)$$

我们定义

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i \qquad (6-47)$$

为阿贝尔函数或系统的加速度能，这样动力学的普遍方程便为

$$\sum_{k=1}^{n}\left(P_k - \frac{\partial S}{\partial \pi_k}\right)\delta\pi_k = 0 \qquad (6-48)$$

如果系统存在 g 个一阶线性非完整约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\beta} \dot{q}_j + a_{\beta} = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (1-18)$$

按上面的讨论 $\delta\pi_k$ 只能有 $m = n - g$ 个是独立的，且 $\delta\pi_k(k = m+1,\cdots,n) = 0$，这样由式(6－47)便有

$$\sum_{k=1}^{m}\left(P_k - \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_k}\right)\delta\pi_k = 0 \qquad (6-49)$$

则有

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_k} = P_k \qquad (k = 1,2,\cdots,m) \qquad (6-50)$$

这便是一阶线性非完整系统的阿贝尔方程，即系统的加速度能对准加速度的一阶偏导数等于作用于系统上相应于准坐标的广义力。

阿贝尔方程对于完整系统和非完整系统都具有简单面统一的形式。对于非完整系统，阿贝尔方程避免引进了与约束力有关的待定乘子，这是阿贝尔方程的优点。

下面我们讨论一下加速度能 S 的计算。

(1) 对于离散质点系，加速度能 S 可以按其定义计算，即

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i a_i^2 \qquad (6-51)$$

式中，m_i 为第 i 个质点的质量，a_i 为第 i 个质点的加速度。

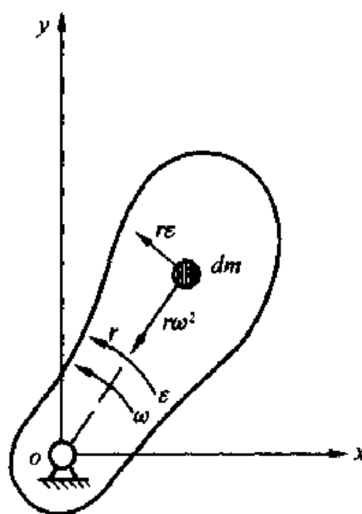


图 6－12

(2) 对于平动刚体，有

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i a_i^2 = \frac{1}{2}a_C^2 \sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{1}{2}Ma_C^2 \qquad (6-52)$$

(3) 定轴转动刚体(如图 6－12)

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i a_i^2 = \frac{1}{2}\int a^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int (r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4)\mathrm{d}m$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \omega^4)\int r^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}J_z(\varepsilon^2 + \omega^4) \qquad (6-53)$$

式中 J_z 为刚体对转轴 oz 的转动惯量。

(4) 平面运动刚体

对于质点系的加速度能量也具有与柯尼希($\dot{K}$ $onig$) 定理相类似的定理。

设质点系的质心为 C,它对固定点 o 的矢径为 $\boldsymbol{r}_C$,系统中的任一质点 M_i,其质量为 m_i,矢径为 $\boldsymbol{r}_i$,该质点相对于质心的矢径为 $\boldsymbol{r}_i'$,如图 6－13 所示。显然有

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_i' \qquad (6-54)$$

且

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_C + \ddot{\boldsymbol{r}}_i' \qquad (6-55)$$

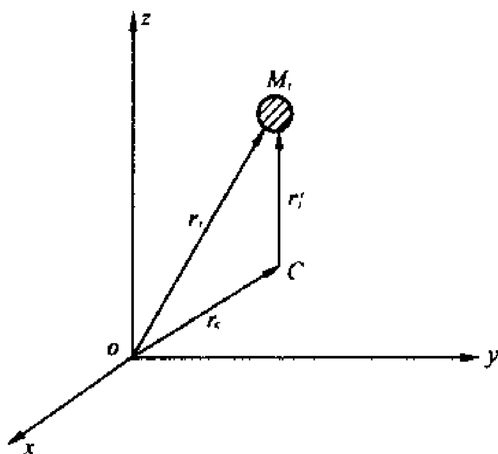


图 6－13

系统的加速度能为

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i a_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_C + \ddot{\boldsymbol{r}}_i')^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_C)^2 + \ddot{\boldsymbol{r}}_C\sum_{i=1}^{N} m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_i') + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_i')^2 \qquad (6-56)$$

因质心相对于自身的矢径为零,即

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i' = 0 \qquad (6-57)$$

所以

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i' = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i'\right) = 0 \qquad (6-58)$$

令 $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$,式(6－56) 可写为

$$S = \frac{1}{2}M\ddot{\boldsymbol{r}}_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i'^2 \qquad (6-59)$$

式中 M 为质点系的总质量,$\ddot{\boldsymbol{r}}_C$ 为质心加速度,$\ddot{\boldsymbol{r}}_i'$ 为质点 M_i 相对于质心的加速度。

质点系的加速度能量应等于系统的质心的加速度能量与该系统相对于其质心运动的加速度能量之和。

平面运动刚体的加速度能量应为

$$S = \frac{1}{2}M(\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2}J_C\ddot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2}Ma_C^2 + \frac{1}{2}J_C\ddot{\varphi}^2 \qquad (6-60)$$

例 6－10　质量为 m,半径为 r 的实心圆柱,在一半径为 R 的固定的空心圆柱内作纯滚动,如图 6－14 所示。试有阿贝尔方程建立圆柱的运动方程并求微振动周期。

解　系统为完整系统,一个自由度,取 θ 为广义坐标,$\dot{\theta}$ 为准速度,$\ddot{\theta}$ 为准加速度。

约束条件应为

解 这是一个完整非保守系统。取系统质心 C 的坐标 x,y 及 θ 为广义坐标。依题意，质心速度始终与 AB 杆垂直，故非完整约束方程为

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = 0 \tag{a}$$

且

$$\ddot{x} = -(\ddot{y}\tan\theta + \dot{y}\dot{\theta}\sec^2\theta) \tag{b}$$

系统的加速度能为

$$S = \frac{1}{2}(2m)(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + 2\times\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4)$$

$$= m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{4}ml^2(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4) \tag{c}$$

取 y,θ 为准坐标，则 $\dot{y},\dot{\theta}$ 为准速度，$\ddot{y},\ddot{\theta}$ 为准加速度，将(b)式代入(c)式，消去 $\ddot{x}$，得

$$S = m[(\ddot{y}\tan\theta + \dot{y}\dot{\theta}\sec^2\theta)^2 + \ddot{y}^2] + \frac{1}{4}ml^2(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4) \tag{d}$$

由于是保守系统，又在水平面上运动，故有

$$\Pi_y = 0, \Pi_\theta = 0$$

由阿贝尔方程，有

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{y}} = \Pi_y, 2m[(\ddot{y}\tan\theta + \dot{y}\dot{\theta}\sec^2\theta)\tan\theta + \ddot{y}] = 0 \tag{f}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}} = \Pi_\theta, \frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = 0 \tag{g}$$

积分式(g)，当 $t = 0, \dot{\theta} = \omega_0, \theta = 0$，得

$$\dot{\theta} = \omega_0 = 常数$$

及

$$\theta = \omega_0 t$$

代入式(f)，得

$$\ddot{y} + \dot{y}\omega_0\tan\omega_0 t = 0 \tag{h}$$

上式分离变量后，有

$$\frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = -\omega_0\tan\omega_0 t\,dt$$

积分，得

$$\ln\dot{y} = \ln C\cos\omega_0 t$$

即有

$$\dot{y} = C\cos\omega_0 t$$

式中 C 为积分常数，当 $t = 0, \dot{y} = v_0$，则可求得

$$C = v_0$$

所以

$$\dot{y} = v_0\cos\omega_0 t \tag{i}$$

将式(i)代入式(a)，得

$$\dot{x} = -v_0\sin\omega_0 t \tag{j}$$

积分式(j)和(i)，当 $t = 0, x = d, y = 0$，得

$$x = \frac{v_0}{\omega_0}(\cos\omega_0 t - 1) + d \tag{k}$$

$$y = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{l}$$

从式(k)、(l) 可以看出，系统运动时质心 C 的轨迹为一半径为$\frac{v_0}{\omega_0}$的圆，圆心在 $C_0(d-\frac{v_0}{\omega_0},0)$。而 A，B 两质点相当于分别被限制在半径分别为$(\frac{v_0}{\omega_0}-\frac{l}{2})$和$(\frac{v_0}{\omega_0}+\frac{l}{2})$的同心光滑圆槽内运动。

例 6－12 两个质量均为 $m=1$ 的质点 M_1，M_2，由一长为 l 的刚杆连接，杆的质量可以忽略不计。设该系统只能在铅垂平面内运动，且杆的中点速度必须沿杆子方向如图 6－16，试建立该系统的阿贝尔方程。

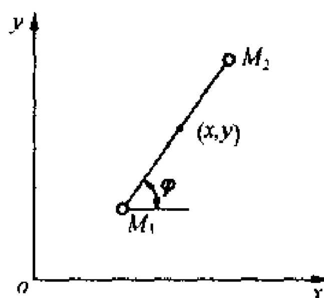


图 6－16

解 取系统的直角坐标参数为

$$x_1, y_1, x_2, y_2$$

取系统的广义坐标参数为

$$x, y, \varphi$$

直角坐标空间内的约束方程为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2 \tag{1}$$

$$(x_2-x_1)(\dot{y}_2+\dot{y}_1)-(y_2-y_1)(\dot{x}_2+\dot{x}_1)=0 \tag{2}$$

直角坐标和广义坐标间的变换关系式为

$$x_1 = x-\frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$y_1 = y-\frac{l}{2}\sin\varphi$$

$$x_2 = x+\frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$y_2 = y+\frac{l}{2}\sin\varphi$$

经过坐标变换非完整约束方程(2) 可表为

$$\dot{y}-\dot{x}\tan\varphi=0$$

由于存在一个非完整约束方程，所以准速度的个数应取为 3－1 即 2 个，取准速度为$\dot{\pi}$，$\dot{\varphi}$，广义速度和准速度间的线性关系式设为

$$\dot{x}=\dot{\pi}\cos\varphi$$
$$\dot{y}=\dot{\pi}\sin\varphi$$
$$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}$$

求一次导数有

$$\ddot{x}=\ddot{\pi}\cos\varphi-\dot{\pi}\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$\ddot{y}=\ddot{\pi}\sin\varphi+\dot{\pi}\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\ddot{\varphi}=\ddot{\varphi}$$

系统的加速度能为

$$S=\frac{1}{2}m_1(\ddot{x}_1^2+\ddot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\ddot{x}_2^2+\ddot{y}_2^2)$$

$$= \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \frac{1}{4}l^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)$$

$$= \ddot{\pi}^2 + \dot{\varphi}^2\dot{\pi}^2 + \frac{1}{4}l^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)$$

设对应于准坐标的广义力为 Π 及 Φ,由主动力的虚功

$$\begin{aligned}\delta\omega &= \Pi\delta\pi + \Phi\delta\varphi \\ &= -m_1 g\delta y_1 - m_2 g\delta y_2 \\ &= -2g\delta y \\ &= -2g\sin\varphi\delta\pi\end{aligned}$$

可得与准坐标相应的广义力为

$$\Pi = -2g\sin\varphi, \Phi = 0$$

分别代入阿贝尔方程得

$$2\ddot{\pi} = -2g\sin\varphi$$

$$\frac{1}{2}l^2\ddot{\varphi} = 0$$

6.4　建立动力学方程的 Kane 方法

到目前为止,我们已研究了一些基本类型的动力学方程。适用于完整系统的有第二类 Lagrange 方程、Hamilton 正则方程,适用于非完整系统的 Lagrange 方程、Apell 方程等。这些方程的共同特点是:由表征系统运动状态的某函数(动能、Hamilton 函数、加速度能等)及广义力按照规定的微分算子就能导出,思路简捷,表达也简捷是其一大优点,而且理想约束的约束力不出现在方程中,其中特别值得称道的是用准坐标表达的方程具有很大的概括性,而且方程的结果往往很简便,都是一阶方程。

由于以上原因,完整及非完整系统动力学的经典研究不仅在理论上而且在应用上都有其不可磨灭的重要意义,不过也应看到这些方程的不足之处,主要是建立了动力学基本函数后,还需经过微分算子的求导运算,对于比较复杂的系统,这种求导运算过程是十分冗长的;相对而言,Apell 方程中的微分算子是最简单的,但建立复杂系统的 Apell 函数亦非易事,因此需要研究建立动力学方程的新方法,以达到省力、灵活、便于用计算机处理的目的。本节主要介绍的 Kane 方法便是能满足上述要求的方法。Kane 方法的特点是:

(1) 用准坐标表达,所有方程都是一阶微分方程。

(2) 进行了必要的运动学分析后,推导方程的过程全部是代数运算,避免了求导运算。

(3) 本方法是普遍方法,适用于完整系统及非完整系统。

鉴于以上特点,使本方法很容易在计算机上进行符号推导,并在计算机上进行数值积分。

6.4.1　Kane 方程及转移矩阵

我们仍考虑一阶线性非完整力学系统,由上节的内容有

$$\sum_{k=1}^{m}\left(P_k - \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_k}\right)\cdot\delta\pi_k = 0 \tag{6-49}$$

我们可以将上面的方程看成为准坐标下的动力学普遍方程,这里令

$$P'_k = -\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_k} \tag{6-61}$$

由上节 $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{r}_i \cdot \ddot{r}_i$,这样

$$\begin{aligned} P'_k &= -\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_k} = \sum_{i=1}^{N}(-m_i \ddot{r}_i)\cdot\frac{\partial \ddot{r}_i}{\partial \ddot{\pi}_k} = \sum_{i=1}^{N}(-m_i \ddot{r}_i)\frac{\partial r_i}{\partial \pi_k} \\ &= \sum_{i=1}^{N}(-m_i \ddot{r}_i)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}b_{jk} \\ &= \sum_{i=1}^{3N}(-m_i \ddot{x}_i)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)b_{jk} \end{aligned} \tag{6-62}$$

$$P_k = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial \pi_k} = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}b_{jk}\right) = \sum_{i=1}^{3N} F_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}b_{jk}\right) \tag{6-63}$$

从上面两式中如果我们称 P_k 为作用于系统上的主动力对应于 $\delta\pi_k$ 上的广义力(或称为广义主动力,则 P'_k 应为系统的惯性力对应 $\delta\pi_k$ 上的广义力(或称为广义惯性力),那么 Apell 方程便成为

$$P_k + P'_k = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,m) \tag{6-64}$$

这就是 Kane 方程,可见 Kane 方程实际上就是 Apell 方程的一种变形。Kane 方法的主要特点并不是建立以上的所谓的 Kane 方程,而是不通过建立 Apell 函数来建立动力学方程。我们采用如下直接矩阵计算方法。记

$$\delta x = [\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_{3N}]^{\mathrm{T}} \tag{6-65}$$

$$\delta q = [\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n]^{\mathrm{T}} \tag{6-66}$$

$$\delta \pi = [\delta \pi_1, \delta \pi_2, \cdots, \delta \pi_m]^{\mathrm{T}} \tag{6-67}$$

$$x_s = x_s(q_1, q_2, \cdots, q_n) \quad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{1-14}$$

$$\delta x_s = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}\delta q_j \quad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{1-29}$$

这样我们可以将上式写成

$$\delta x = G\delta q \tag{6-68}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial q_1 & \partial x_1/\partial q_2 & \cdots & \partial x_1/\partial q_n \\ \partial x_2/\partial q_1 & \partial x_2/\partial q_2 & \cdots & \partial x_2/\partial q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_{3N}/\partial q_1 & \partial x_{3N}/\partial q_2 & \cdots & \partial x_{3N}/\partial q_n \end{bmatrix} \tag{6-69}$$

式(6-36)

$$\delta q_j = \sum_{k=1}^{m} b_{jk}\delta\pi_k \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{6-36}$$

可表示成

$$\delta q = B\delta\pi \tag{6-70}$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \tag{6-71}$$

显然有

$$\delta x = K\delta\pi \tag{6-72}$$

其中

$$K = GB = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{3N,1} & k_{3N,2} & \cdots & k_{3N,m} \end{bmatrix} \tag{6-73}$$

我们将 K 称为转移矩阵，在 Kane 方程中起着关键作用。这样便有

$$k_{sk} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_{jk} \quad (s = 1,2,\cdots,3N; k = 1,2,\cdots,m) \tag{6-74}$$

从而有

$$P_k = \sum_{s=1}^{3N} F_s k_{sk} \qquad (k = 1,2,\cdots,m) \tag{6-75}$$

$$P'_k = \sum_{s=1}^{3N} (-m_s \ddot{x}_s) k_{sk} \qquad (k = 1,2,\cdots,m) \tag{6-76}$$

由此可见，只要知道了转移矩阵 K 我们就可以从系统给定的主动力和惯性力直接给出P_k 及 P'_k，从而得到 Kane 方程，它们和系统的附加约束方程一起构成了系统的动力学方程组。

6.4.2 Kane 矩阵的物理意义

在构成 Kane 方程中，转移矩阵 K 起着重要的作用，为了说明 K 阵的意义，注意到有

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk} \dot{\pi}_k + b_j \right) + \frac{\partial x_s}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^{m} k_{sk} \dot{\pi}_k + c_s \qquad (s = 1,2,\cdots,3N) \end{aligned} \tag{6-77}$$

其中

$$c_s = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{6-78}$$

仅是广义坐标和时间 t 的函数，而与准速度$\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \cdots, \dot{\pi}_m$ 无关。由此可见，转移矩阵 K 乃是质点速度用准速度表达时线性部分的系数矩阵，而剩下的部分则是与准速度无关的项，在 Kane 的工作中，称系数 k_{sk} 为“偏速度”。

另外，我们来注意一下 k_{sk}“偏速度” 的计算

$$k_{sk} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_{jk} \qquad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{6-74}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\dot{\pi}_k}(\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i)=\frac{\partial}{\partial\dot{\pi}_k}(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\dot{\pi}_k}[\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i')]$$
$$=\frac{\partial}{\partial\dot{\pi}_k}(\boldsymbol{R}_C\cdot\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{M}_C\cdot\boldsymbol{\omega})$$
$$=\boldsymbol{R}_C\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}_C}{\partial\dot{\pi}_k}+\boldsymbol{M}_C\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{\pi}_k}+\boldsymbol{v}_C\cdot\frac{\partial\boldsymbol{R}_C}{\partial\dot{\pi}_k}+\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{M}_C}{\partial\dot{\pi}_k}\quad(6-87)$$

而且第二项为

$$-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{F}_i}{\partial\dot{\pi}_k}=-\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i')\cdot\frac{\partial\boldsymbol{F}_i}{\partial\dot{\pi}_k}$$
$$=-(\boldsymbol{v}_C\cdot\frac{\partial\boldsymbol{F}_C}{\partial\dot{\pi}_k}+\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{M}_C}{\partial\dot{\pi}_k})\quad(6-88)$$

注意在推导上式中有

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial\dot{\pi}_k}=0\quad(6-89)$$

因此,最后结果是

$$P_k=\boldsymbol{R}_C\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}_C}{\partial\dot{\pi}_k}+\boldsymbol{M}_C\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{\pi}_k}\quad(6-90)$$

将上式中的主动力系的主矢和主矩换成惯性力系的主矢和主矩即可得凯恩方程中的广义惯性力为

$$P_k'=\boldsymbol{R}_{gC}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}_C}{\partial\dot{\pi}_k}+\boldsymbol{M}_{gC}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{\pi}_k}\quad(6-91)$$

下面考虑由多个刚体组成的系统。

设多刚体系统内共有 n 个刚体,系统的自由度数目为 m;并设 $\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{R}_{gi},\boldsymbol{M}_{gi}$ 分别是作用在第 i 个刚体上的主动力系及惯性力系向其质心简化的主矢及主矩;$\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{\omega}_i$ 分别是第 i 个刚体的质心速度和角速度;$\dot{\pi}_k$ 为系统的准速度。

由式(6-90)及式(6-91),得到第 i 个刚体的广义主动力及广义惯性力

$$P_{ik}=\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial\dot{\pi}_k}+\boldsymbol{M}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_i}{\partial\dot{\pi}_k}\quad(i=1,\cdots,n\quad k=1,\cdots,m)\quad(6-92)$$

$$P_{ik}'=\boldsymbol{R}_{gi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial\dot{\pi}_k}+\boldsymbol{M}_{gi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_i}{\partial\dot{\pi}_k}\quad(i=1,\cdots,n\quad k=1,\cdots,m)\quad(6-93)$$

在整个系统内求广义主动力和广义惯性力之和,分别得

$$P_k=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial\dot{\pi}_k}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_i}{\partial\dot{\pi}_k}\quad(k=1,\cdots,m)\quad(6-94)$$

$$P_k'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_{gi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial\dot{\pi}_k}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_{gi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_i}{\partial\dot{\pi}_k}\quad(k=1,\cdots,m)\quad(6-95)$$

代人原始的凯恩方程,得到

$$P_k+P_k'=0\qquad(k=1,\cdots,m)$$

式中的系数由式(6-94)、式(6-95)决定。

例 6-13 图 6-18 中重量为 P 三棱柱 ABC 无摩擦地在光滑水平面上移动,重 Q 的

匀质圆柱沿着 AB 斜面无滑动地滚动，试用凯恩方法求三棱柱的运动。

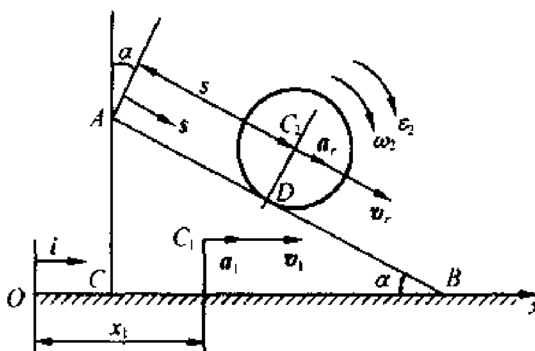


图 6－18

解 三棱柱作平动，惯性力系向其质心 C_1 简化得一合力，设 ABC 向右移动的加速度为 $\boldsymbol{a}_1$，则惯性力为

$$\boldsymbol{F}_{g1} = -\frac{P}{g}\boldsymbol{a}_1 = -\frac{P}{g}a_1\boldsymbol{i} \qquad (1)$$

圆柱作平面运动，设其质心 C_2 相对于三棱柱的加速度为 $\boldsymbol{a}_r$，则其绝对加速度为 $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_r$，于是，圆柱体的惯性力系向 C_2 点简化的惯性力为

$$\boldsymbol{F}_{g2} = -\frac{Q}{g}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_r) = -\frac{Q}{g}a_1\boldsymbol{i} - \frac{Q}{g}a_r\boldsymbol{s} \qquad (2)$$

同时惯性力矩为

$$\boldsymbol{M}_{g2} = -J_{C2}\boldsymbol{\varepsilon}_2 = -\frac{Q}{2g}r^2\cdot\left(-\frac{a_r}{r}\boldsymbol{k}\right) = \frac{Qr}{2g}a_r\boldsymbol{k} \qquad (3)$$

式中 r 是圆柱体的半径，ε_2 是圆柱体的角加速度。

现分析两个刚体的速度情况：三棱柱质心 C_1 的速度是

$$\boldsymbol{v}_1 = v_1\boldsymbol{i} \qquad (4)$$

而圆柱体质心 C_2 的速度是

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_r = v_1\boldsymbol{i} + v_r\boldsymbol{s} \qquad (5)$$

式中 s 是斜面 AB 的单位向量，v_r 是相对速度，圆柱的角速度

$$\boldsymbol{\omega}_2 = -\omega_2\boldsymbol{k} \qquad (6)$$

圆柱相对三棱柱作纯滚动有

$$v_r = \omega_2 rs \qquad (7)$$

取准速度为

$$\dot{\pi}_1 = v_1, \dot{\pi}_2 = v_r \qquad (8)$$

则相应于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}$ 的各运动学量改写为

$$\begin{aligned} &v_{1i} = \dot{\pi}_1, v_{1s} = 0, v_{1k} = 0 \\ &v_{2i} = \dot{\pi}_1, v_{2s} = \dot{\pi}_2, v_{2k} = 0 \\ &\omega_{2i} = 0, \omega_{2s} = 0, \omega_{2k} = -\frac{\dot{\pi}_2}{r} \end{aligned} \qquad (9)$$

将主动力改写为

$$\begin{aligned} &F_{1i} = 0, F_{1s} = P\sin\alpha, F_{1k} = 0 \\ &F_{2i} = 0, F_{2s} = Q\sin\alpha, F_{2k} = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

将惯性力、惯性力矩改写为

$$F_{g1i} = -\frac{P}{g}a_1, F_{g1s} = -\frac{P}{g}a_1\cos\alpha, F_{g1k} = 0$$

$$F_{g2i} = -\frac{Q}{g}a_1 - \frac{Q}{g}a_r\cos\alpha, F_{g2s} = -\frac{Q}{g}a_1\cos\alpha - \frac{Q}{g}a_r, F_{g2k} = 0$$

$$M_{g2i}=0,M_{g2s}=0,M_{g2k}=\frac{Qr}{2g}a_r \tag{11}$$

下面求偏速度 k_{sk},($s=1,2,\cdots,9 \quad k=1,2$)

$$k_{11}=\frac{\partial v_{1i}}{\partial\dot{\pi}_1}=1,k_{21}=\frac{\partial v_{1s}}{\partial\dot{\pi}_1}=0,k_{31}=\frac{\partial v_{1k}}{\partial\dot{\pi}_1}=0$$

$$k_{41}=\frac{\partial v_{2i}}{\partial\dot{\pi}_1}=1,k_{51}=\frac{\partial v_{2s}}{\partial\dot{\pi}_1}=0,k_{61}=\frac{\partial v_{2k}}{\partial\dot{\pi}_1}=0$$

$$k_{71}=\frac{\partial \omega_{2i}}{\partial\dot{\pi}_1}=0,k_{81}=\frac{\partial \omega_{2s}}{\partial\dot{\pi}_1}=0,k_{91}=\frac{\partial \omega_{2k}}{\partial\dot{\pi}_1}=0$$

$$k_{12}=\frac{\partial v_{1i}}{\partial\dot{\pi}_2}=0,k_{22}=\frac{\partial v_{1s}}{\partial\dot{\pi}_2}=0,k_{32}=\frac{\partial v_{1k}}{\partial\dot{\pi}_2}=0$$

$$k_{42}=\frac{\partial v_{2i}}{\partial\dot{\pi}_2}=0,k_{52}=\frac{\partial v_{2s}}{\partial\dot{\pi}_2}=1,k_{62}=\frac{\partial v_{2k}}{\partial\dot{\pi}_2}=0$$

$$k_{72}=\frac{\partial \omega_{2i}}{\partial\dot{\pi}_2}=0,k_{82}=\frac{\partial \omega_{2s}}{\partial\dot{\pi}_2}=0,k_{92}=\frac{\partial \omega_{2k}}{\partial\dot{\pi}_2}=-\frac{1}{r} \tag{12}$$

将式(10)、(11)、(12)代入凯恩方程 $P_k+P_k'=0 \quad (k=1,2)$ 有

$$-\frac{P}{g}a_1-\frac{Q}{g}a_1-\frac{Q}{g}a_r\cos\alpha=0 \tag{13}$$

$$-\frac{Q}{g}a_1\cos\alpha-\frac{Q}{g}a_r-\frac{Q}{2g}a_r+Q\sin\alpha=0 \tag{14}$$

联立式(12)、(13),解出三棱柱的加速度

$$a_1=-\frac{Q\sin2\alpha}{3(P+Q)-2Q\cos^2\alpha}g \tag{15}$$

其方向沿 x 轴负方向。

另外对于 P_k 和P_k' 的计算,为了对每一个刚体上作用的主动力系和惯性力系进行简化,可注意有如下的功率公式,对于完整系统及一阶线性非完整系统,其给定力的总功率及惯性力的总功率分别为

$$\begin{aligned}W&=\sum_{s=1}^{3N}F_s\dot{x}_s=\sum_{s=1}^{3N}F_s(\sum_{k=1}^{m}k_{sk}\dot{\pi}_k+c_s)\\&=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{3N}F_sk_{sk}\dot{\pi}_k+\sum_{s=1}^{3N}F_sc_s\\&=\sum_{k=1}^{m}(\sum_{s=1}^{3N}F_s\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}b_{jk})\dot{\pi}_k+\sum_{s=1}^{3N}F_sc_s\\&=p_1\dot{\pi}_1+P_2\dot{\pi}_2+\cdots,+P_m\dot{\pi}_m+\sum_{s=1}^{3N}F_sc_s\end{aligned} \tag{6-96}$$

同样惯性力总功率应为

$$W'=P_1'\dot{\pi}_1+P_2'\dot{\pi}_2+\cdots,+P_m'\dot{\pi}_m+\sum_{s=1}^{3N}(-m_s\ddot{x}_s)c_s \tag{6-97}$$

从上面的两个式子中可以看出,两式中的最后一项是与准速度无关的项,这样我们可以暂时认为作用在系统上的主动力系与惯性力系是与准速度无关的,这样整个系统的主动力和惯性力总功率的表达式应是准速度的线性式,而相应的系数就构成Kane方程的 P_k 和P_k',这可以看做是一个原则,在应用 Kane 方程时相当重要。因为根据它,我们在计算 P_k 和P'_k 时,可

以将主动力系和惯性力系作任意简化，只要保持“暂时认定作用在系统上的主动力系与惯性力系是与准速度无关”这个假定，并且简化前后的总功率不变就可以了。

Kane 方法最后归结为广义主动力和广义惯性力的计算，因此，需要研究刚体的广义主动力及广义惯性力的计算方法。

假定我们研究的是一个多体系统，总共有 l 个刚体，那么整个系统的总功率有

$$W = \sum_{\eta=1}^{l} W_\eta \qquad W' = \sum_{\eta=1}^{l} W'_\eta \tag{6-98}$$

其中 W_η, W'_η 是标号为 η 的刚体的主动力功率和惯性力功率，下面来计算 W_η, W'_η。

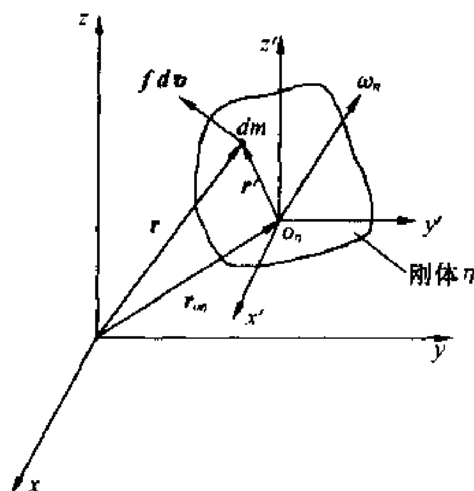


图 6 - 19

假定标号为 η 的刚体如图 6 - 19 所示，取 $Oxyz$ 为惯性坐标系，$O_\eta x'y'z'$ 为随同 O_η 做平动的动参考系，O_η 为刚体内运动已知的点即基点，并设其为力系的简化中心，其空间矢径为 $\boldsymbol{r}_{O_\eta}$，另外该刚体的角速度矢量设为 $\boldsymbol{\omega}_\eta$，取刚体内一质量微元 dm，其在惯性坐标系中的向径为 $\boldsymbol{r}$，在动坐标系中的向径设为 $\boldsymbol{r}'$，这样质量微元的速度为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{O_\eta} + \boldsymbol{\omega}_\eta \times \boldsymbol{r}' \tag{6-99}$$

并设作用于质量微元上的主动力微元为 $\boldsymbol{f}dv$，设刚体的质量密度为 ρ，根据定义有

$$W_\eta = \iiint\limits_V \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}v \tag{6-100}$$

$$W'_\eta = \iiint\limits_V (-\rho\, \ddot{\boldsymbol{r}}) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}v \tag{6-101}$$

将以上各式代入 W_η, W'_η 的表达式有

$$\begin{aligned} W_\eta &= \iiint \boldsymbol{f} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}_{O_\eta} + \boldsymbol{\omega}_\eta \times \boldsymbol{r}')\mathrm{d}v \\ &= \iiint \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{O_\eta}\mathrm{d}v + \iiint \boldsymbol{\omega}_\eta \cdot (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{f})\mathrm{d}v \\ &= \left(\iiint \boldsymbol{f}\mathrm{d}v\right) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{O_\eta} + \boldsymbol{\omega}_\eta \cdot \iiint (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{f})\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{6-102}$$

记刚体上主动力系对简化中心 O_η 的主矢为 $\boldsymbol{F}_\eta$，主矩为 $\boldsymbol{M}_{O_\eta}$，则上式可表示为

$$W_\eta = \boldsymbol{F}_\eta \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{O_\eta} + \boldsymbol{M}_{O_\eta} \cdot \boldsymbol{\omega}_\eta \tag{6-103}$$

同理可得

$$W'_\eta = (-M_\eta\, \ddot{\boldsymbol{r}}_{O_\eta}) \cdot \boldsymbol{r}'_\eta + \boldsymbol{M}'_{O_\eta} \cdot \boldsymbol{\omega}_\eta \tag{6-104}$$

其中 M_η 是标号为 η 的刚体的总质量，$\boldsymbol{M}'_{O_\eta}$ 是刚体 η 对简化中心 O_η 的惯性主矩。这样整个系统的功率可将多个刚体累加而得，即

$$W = \sum_{\eta=1}^{l} (\boldsymbol{F}_\eta \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{O_\eta} + \boldsymbol{M}_{O_\eta} \cdot \boldsymbol{\omega}_\eta) \tag{6-105}$$

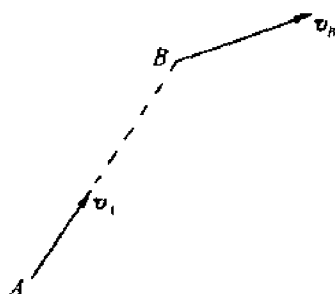
$$W' = \sum_{\eta=1}^{l} [(-M_\eta\, \ddot{\boldsymbol{r}}_{O_\eta}) \cdot \boldsymbol{r}'_\eta + \boldsymbol{M}'_{O_\eta} \cdot \boldsymbol{\omega}_\eta] \tag{6-106}$$

只要我们能够将每个刚体的$\dot{r}_{O_\eta}$，ω_η转换为准速度的表达式，并暂时认定F_η，M_{O_η}，$-M_\eta\ \ddot{r}_{O_\eta}$，$M'_{O_\eta}$等与准速度无关，那么通过求和，整个系统的$W$，$W'$相应于式(6－60)(6－61)的表达式便不难得到，这时由于整个系统的理想约束力不做功，所以在计算中不必加以考虑，根据功率公式的性质，通过以上表达式的系数可以直接得到Kane方程。

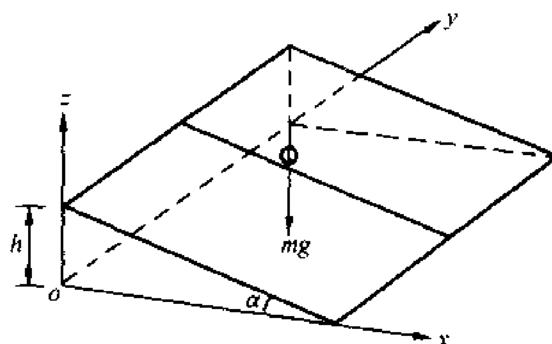
习 题

6－1　设质点A和B在空间运动时，A点的速度始终指向点B而形成一个最简单的"追迹系统"，如题图6－1所示。试证明这是一个非完整系统，并计算其自由度及广义坐标数。

6－2　质量为m的质点在其重力作用下，沿光滑斜面运动，如题图6－2所示。试用第一类拉格朗日方程求质点的运动规律及斜面的约束力。

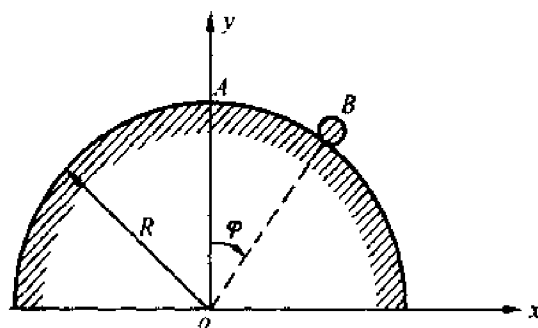


题图6－1

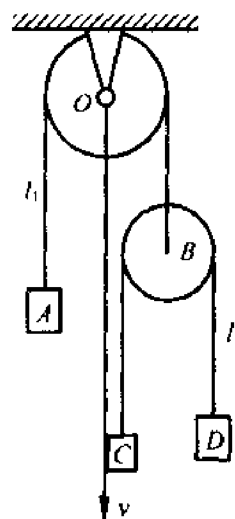


题图6－2

6－3　质量为m的质点在其重力作用下，在一半径为R的光滑的半球面上运动。假设开始时，质点在半球顶端，并具有水平初速v_0，如图6－3所示，试用第一类拉格朗日方程，求质点在什么位置离开球面？欲使质点一开始运动就脱离球面，问v_0应为多少？



题图6－3

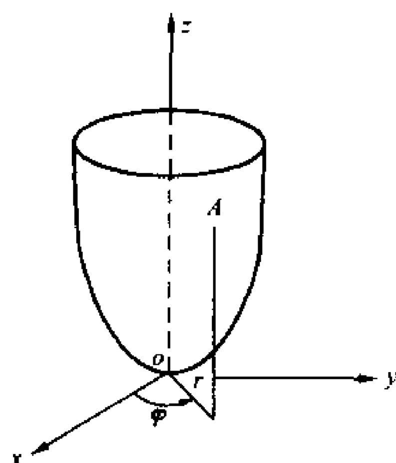


题图6－4

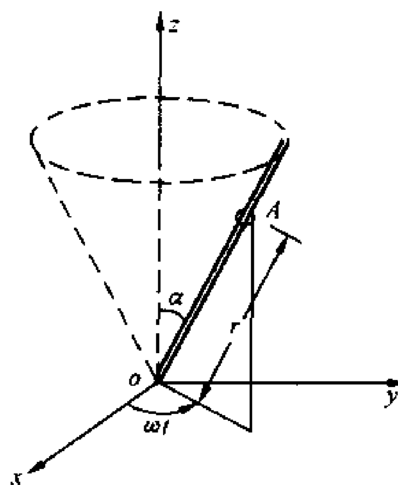
6－4 如题图 6－4 所示滑轮系统，定滑轮 O 上绕有绳长 l_1，动滑轮 B，重为 P_2，其上绕有绳长 l_2，绳子均不可伸长，重物 A,C,D 的重量分别为 P_1,P_3,P_4，且 $P_2=P_3=P,P_1=4P,P_4=2P$，假设各滑轮大小不计，全为理想约束。试用第一类拉格朗日方程求系统的运动和各约束力。

6－5 质量为 m 的质点，在其重力作用下，在一光滑的旋转抛物面内运动，如题图 6－5 所示。抛物面方程式为 $x^2+y^2=pz$，p 为常数。试用罗斯方程求质点的运动微分方程。

6－6 质量为 m 的小环 A，套在光滑的杆上，杆绕铅垂轴以等角速度 ω 旋转成圆锥形，杆与铅垂轴夹角为 α，如题图 6－6 所示，试用罗斯方程求小环的运动及其所受的约束力。



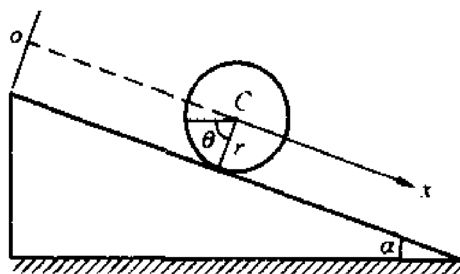
题图 6－5



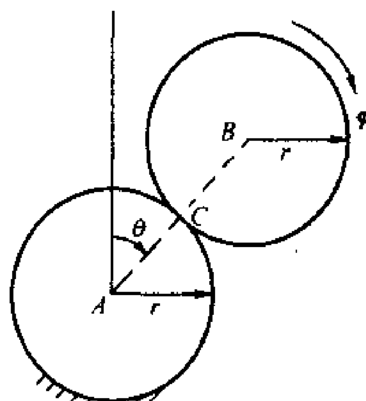
题图 6－6

6－7 质量为 m，半径为 r 的均质圆桶，从倾角为 α 的斜面上无滑动地滚下，如题图 6－7 所示，试用罗斯方程求圆桶的角加速度，质心加速度及斜面对圆桶的摩擦力。

6－8 质量为 m，半径为 r 的均质圆球 B，放在半径亦为 r 的固定球面的顶点，B 球受一微小扰动后，从平衡位置 $\theta=0$ 开始滚动，如题图 6－8 所示，设球面的滑动摩擦系数为 $f=0.5$，试用罗斯方程求 B 球开始滑动的 θ 角。



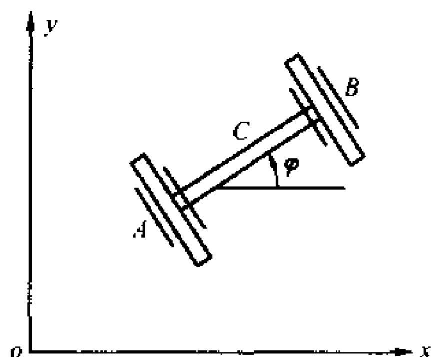
题图 6－7



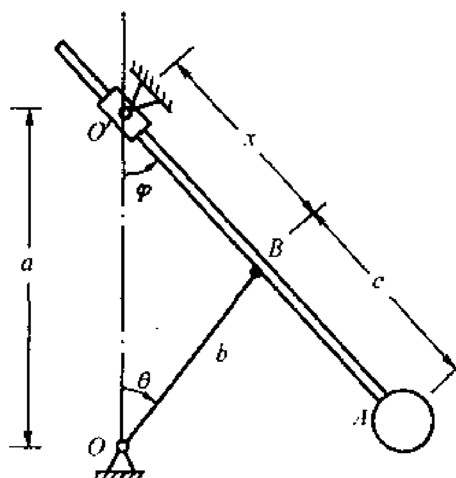
题图 6－8

6-9　车轮 A 和 B 用长为 $2l$ 的轴通过轴承相连接后置于粗糙水平地面上作纯滚动，如题图 6-9 所示。以 AB 中点 C 的坐标 x_c，y_c 和 AB 与 x 轴的夹角 φ 以及 A、B 两轮的转角 θ_A，θ_B 为广义坐标写出系统的约束方程，并由此证明 C 点的速度只能垂直于 AB。

6-10　希立克测振仪如题图 6-10 所示，设 $bc>(a-b)^2$，求在铅垂位置附近作微振动的微分方程和振动周期。



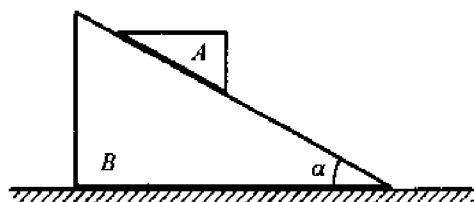
题图 6-9



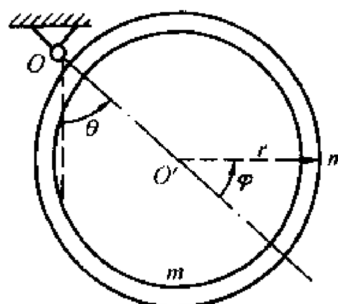
题图 6-10

6-11　三棱柱 A，可沿三棱柱 B 的光滑的斜面滑动，而 B 又可在光滑的水平面上滑动，如题图 6-11 所示，设 A，B 各重为 P 和 Q，开始时系统静止，试用阿沛尔方程求三棱柱 B 的加速度。

6-12　质量为 m 的均质细管被弯成半径为 r 的圆环，可绕其边缘上一固定点在其自身平面内摆动，管内有一质量为 m 的质点任其滑动，如题图 6-12 所示。摩擦不计，试用阿沛尔方程求其运动微分方程。



题图 6-11



题图 6-12

6-13　内外半径分别为 ρ 和 R 的空心圆柱，质量为 M，可在半径为 R 的固定圆桶内滑动，另一质量为 m，半径为 r 的均质圆柱 A 又在空心圆柱内作纯滚动，如题图 6-13 所示，取 θ、φ 为广义坐标，试用阿沛尔方程列出系统的运动微分方程。

6-14　半径为 R，质量为 M 的圆盘(视为均质)沿水平直线轨道作纯滚动。在圆盘面

参 考 文 献

[1] 谈开孚.分析力学.哈尔滨工业大学出版社,1985
[2] 黄昭度,钟奉俄.工程系统分析力学.北京:高等教育出版社,1992
[3] 陈滨.分析动力学.北京大学出版社,1987
[4] 刘正福,沙永海.分析力学解题指导及习题集.北京:高等教育出版社,1992
[5] 邱秉权.分析力学.成都:西南交通大学出版社,1998
[6] 黄昭度,纪辉玉.分析力学.北京:清华大学出版社,1985
[7] 梅凤翔,刘桂林.分析力学基础.西安交通大学出版社,1987
[8] 吕茂烈.理论力学范例分析.西安:陕西科学技术出版社,1986